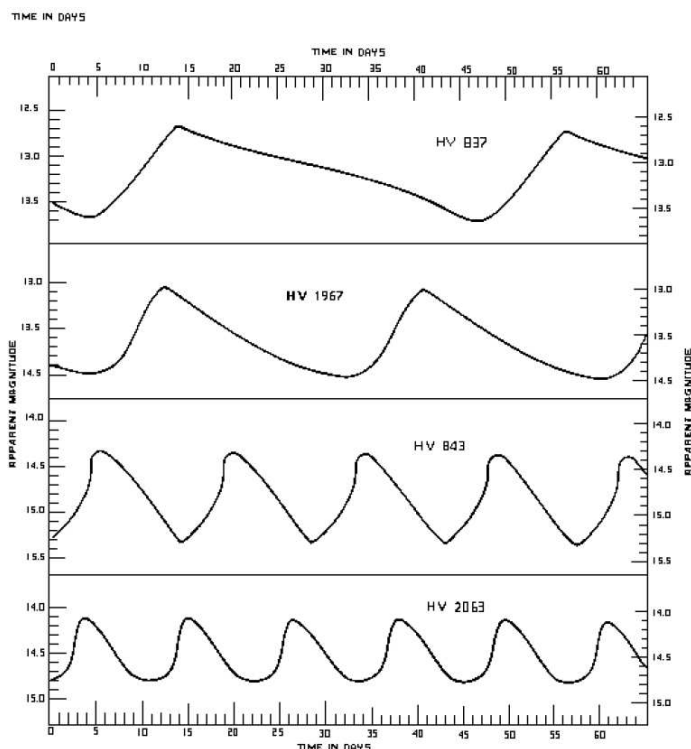


Teil A

1. Cepheiden

5 Pkt.

- (a) Die Abbildung zeigt die Lichtkurven verschiedener etwa gleich weit von uns entfernter Cepheiden. Messen Sie die Länge der Perioden und tragen die Maxima und Minima der Helligkeit gegen diese auf (Zeitachse logarithmisch). Zeigt sich eine Regelmäßigkeit?



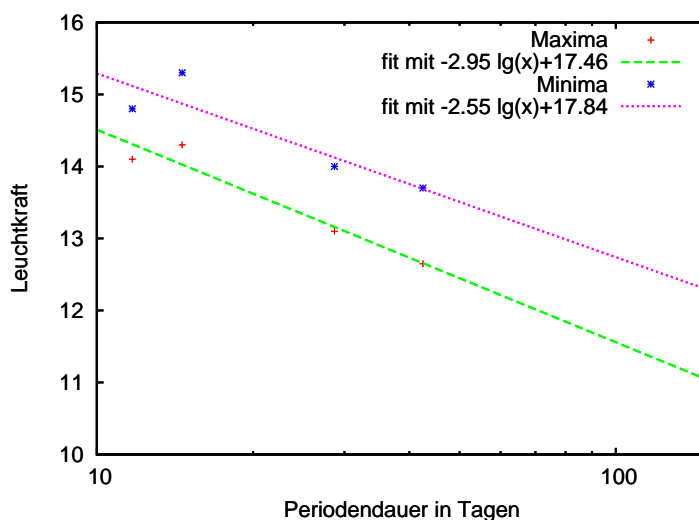
- (b) Warum wäre Henrietta Leavitts Entdeckung der Perioden-Leuchtkraft-Beziehung mit Cepheiden aus der Milchstraße nicht ohne Weiteres möglich gewesen?
- (c) Mit dem Hubble-Weltraumteleskop kann man Sterne bis herab zu einer scheinbaren Helligkeit von $m = 30$ mag erkennen. Welches ist die maximale Entfernung, die man mit der Cepheiden-Methode noch bestimmen kann, wenn die absolute Helligkeit der leuchtkräftigsten Cepheiden um einen Mittelwert von etwa $M = -5$ mag oszilliert?

Lösung:

- (a) Dem Bild entnehmen wir durch Messung mit einem Lineal folgende Tabelle

Periode P /[d]	max. Helligkeit	min. Helligkeit	$\lg P$ /[d]
42	12.65	13.7	1.62
28.5	13.05	14.0	1.45
14	14.25	15.3	1.15
11.5	14.1	14.8	1.06

Tragen wir dies in ein Diagramm ein und fitten Maxima und Minima an Funktionen $M(P) = a \lg P + b$, so ergibt sich das dargestellte Bild:



Der Mittelwert der Steigungen ist

$$a = 1/2(-2.95 - 2.55) = -2.75$$

Der Absolutwert b hat keine allgemeine Bedeutung, weil hier ja scheinbare Helligkeiten aufgetragen werden. Kennt man allerdings den entsprechenden Wert für die absoluten Helligkeiten der Cepheiden, kann man daraus den Entfernungsmodul bestimmen. Der aktuelle Literaturwert für die Steigung ist laut Wikipedia („Cepheiden“, nachgeschlagen am 12.04.2020) $a = -2.81$. Die Perioden-Leuchtkraft-Beziehung lautet

$$M = -2.81 \lg(P/[d]) - 1.43.$$

$\lg P/[d]$	$m = -2.75 \lg(P/[d]) + 17.65$	M	$\mu = m - M$
1.62	13.25	-5.98	19.23
1.45	13.66	-5.50	19.16
1.15	14.49	-4.66	19.15
1.06	14.74	-4.41	19.15

Damit ergibt sich ein Entfernungsmodul von $\mu = 19.17$, wenn für b der Mittelwert aus dem Fit an die Minima und Maxima genommen wird. Das entspricht einer Entfernung von $D = 10^{0.2\mu+1} \text{ pc} = 68234 \text{ pc}$.

- (b) Cepheiden in der Milchstraße wären alle unterschiedlich weit vom Sonnensystem entfernt. Man wüsste nicht, ob Helligkeitsunterschiede real wären oder aufgrund unterschiedlicher Entfernungen zu Stande kämen. Eine Kalibrierung der Beziehung zwischen Leuchtkraft und Periode wäre damit erschwert.

Die von Frau Leavitt in der kleinen magellanschen Wolke entdeckten Cepheiden haben alle ungefähr die gleiche Entfernung zum Sonnensystem, denn die Ausdehnung der Wolke ist im Vergleich zu ihrer Entfernung klein (Entfernung rund 64 kpc, Durchmesser rund 3.1 kpc). Unterschiede in der Leuchtkraft bei verschiedenen Perioden mussten also real sein. Sobald dann die absolute Helligkeit eines dieser Sterne bekannt war (oder seine Entfernung bestimmt war, dies gelang

Ejnar Hertzsprung 1913 für einige Cepheiden in der Milchstraße) konnte die Entfernungsskala geeicht werden.

- (c) In einer früheren Formulierung der Aufgabe konnte das Missverständnis auftreten, dass es sich bei den 5 Magnituden um die Schwankungsamplitude der Cepheidenhelligkeit handelt. Deshalb ist es nützlich, sich zunächst klar zu machen, dass ein Helligkeitsunterschied von 5 Magnituden zwischen Maximum und Minimum *keine* Information über die Entfernung liefert, weil er im logarithmischen Helligkeitsmaß entfernungsunabhängig ist:

$$m_{\max} = M_{\max} + 5 \lg \frac{D}{[10 \text{ pc}]}$$

$$m_{\min} = M_{\min} + 5 \lg \frac{D}{[10 \text{ pc}]}$$

$$\Rightarrow m_{\max} - m_{\min} = M_{\max} - M_{\min}$$

$M = -5$ ist also die (mittlere) absolute Helligkeit der leuchtstärksten Cepheiden. (Die *Schwankung* von deren Helligkeit liegt zwischen ein und zwei Magnituden, wie es Teilaufgabe (a) auch nahelegt.)

Da das Hubble-Space-Teleskop Sterne mit scheinbaren Helligkeiten von bis zu $m = 30$ sichtbar macht, ist ein Entfernungsmodul von $\mu = m - M \approx 35$ für Cepheiden erreichbar. Das entspricht einer Entfernung von $D = 10^{0.2\mu+1} \text{ pc} = 10^8 \text{ pc}$, also 326 Millionen Lichtjahren. Diese Entfernung liegt im Bereich weniger Prozent des Radius des sichtbaren Kosmos (je nach Definition – wenn man als maximale *look-back*-Distanz 13.7 Milliarden Lichtjahre annimmt, sind wir bei etwa 2.4% des Radius des Kosmos; nehmen wir stattdessen den Teilchenhorizont von 46 Milliarden Lichtjahren an, sind es entsprechend weniger, aber dann müsste man auch berücksichtigen, dass der Cepheid selbst sich in den letzten 326 Millionen Jahren von uns entfernt hat).

2. Temperatur im Sonneninneren

5 Pkt.

Wir wollen mit einfachen Überlegungen eine Vorstellung von der Temperatur im Innern der Sonne, speziell in der Nähe ihres Mittelpunkts gewinnen. Dazu zerlegen wir gedanklich die Sonne in zwei Halbkugeln (die wir als homogen betrachten), berechnen näherungsweise die gravitative Anziehungskraft zwischen ihnen und ermitteln daraus den mittleren Druck auf die Grundfläche der beiden Halbkugeln. Mithilfe der mittleren Dichte lässt sich dann unter Voraussetzung der Gültigkeit der Zustandsgleichung eines idealen Gases die Temperatur bestimmen.

- (a) Berechnen Sie zunächst die Lage des Schwerpunkts einer Halbkugel. (2 Pkt.)
- (b) Nehmen Sie für die Berechnung der Anziehungskraft an, dass sie denselben Wert hat, wie die von zwei äquivalenten Punktmassen, die in den Schwerpunkten der beiden Halbkugeln sitzen. Berechnen Sie dann Druck und Temperatur. (3 Pkt.)

Zahlenwerte: Sonnenmasse $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, Protonenmasse $m_p = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (jedem Proton entsprechen ca. 2 freie Teilchen im Gas, nämlich das Proton und ein Elektron, dessen Masse vernachlässigbar ist), Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$, Boltzmannkonstante $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.

Lösung:

- (a) Zur Berechnung des Schwerpunkts einer Halbkugel legen wir den Koordinatenursprung in den Kugelmittelpunkt und orientieren das Koordinatensystem so, dass die Grundfläche der Halbkugel in der xy -Ebene liegt. Dann müssen offensichtlich die x - und y -Koordinaten des Schwerpunkts verschwinden und es ist nur noch die z -Komponente des Schwerpunktvektors zu berechnen.

Bei konstanter Dichte ρ ist der Ortsvektor des Schwerpunkts (M_H : Masse der Halbkugel)

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{M_H} \int \rho \mathbf{r} dV, \quad M_H = \int \rho dV = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho,$$

und die Berechnung ist in kartesischen Koordinaten etwa gleich aufwändig wie in Kugelkoordinaten. Man sehe:

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\rho}{M_H} \int_0^R z dz \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} dx dy = \frac{\rho}{M_H} \int_0^R z dz \pi(R^2 - z^2) \\ &= \frac{3}{2R^3} \left(R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{3}{2R^3} \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\rho}{M_H} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r \cos \vartheta r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ &= \frac{2\pi\rho}{M_H} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) d\vartheta = \frac{3}{R^3} \frac{R^4}{4} \left(-\frac{1}{4} \cos(2\vartheta) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3}{4} R \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

- (b) Die Massen der beiden Hälften sind $M_H = M/2$, der Abstand ihrer Schwerpunkte ist $2z_S$. Die tatsächliche Anziehungskraft zweier solcher Objekte müsste durch Integration des Newtonschen Gravitationsgesetzes über alle Massenelemente beider Halbkugeln berechnet werden. Wir machen jedoch die (grobe) Näherung, dass die Halbkugeln wie zwei in ihren Schwerpunkten vereinigte Punktmassen behandelt werden können. Das ergibt für die Anziehungskraft:

$$F \approx G \frac{(M/2)^2}{(2z_S)^2} = G \frac{M^2}{4(3R/4)^2} = \frac{4}{9} G \frac{M^2}{R^2}.$$

Mit der Näherung, dass diese Kraft sich gleichmäßig auf die Basisfläche der Halbkugeln verteilt, wird der Druck

$$\bar{p} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{4}{9\pi} G \frac{M^2}{R^4}.$$

Mit der Zustandsgleichung eines idealen Gases und der Annahme, dass die Teilchenzahl N das Doppelte der der Gesamtmasse entsprechenden Protonenzahl ist,

$N = 2M/m_p$ erhalten wir

$$\bar{p}V = Nk_B T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\bar{p}V}{Nk_B}$$

$$T = \frac{m_p \bar{p}V}{2Mk_B} = \frac{m_p \cdot \frac{4}{9\pi} G \frac{M^2}{R^4} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}}{2Mk_B} = \frac{m_p \cdot \frac{4}{9} G \frac{M}{R} \cdot \frac{4}{3}}{2k_B}$$

$$T = \frac{8}{27} G \frac{m_p M}{R} \frac{1}{k_B}$$

Dieser Formel entnehmen wir die wesentlichen Abhängigkeiten der Temperatur – sie ist proportional zur Gesamtmasse und umgekehrt proportional zum Radius des Sterns. Man kann sie auch noch interpretieren: die mittlere thermische Energie $k_B T$ eines Teilchens (ob Elektron oder Proton) entspricht $8/27$ der potentiellen Energie eines Protons an der Sonnenoberfläche. Da der Faktor $8/27$ bestimmt nicht genau ist, können wir sagen, dass die mittlere thermische Energie eines Teilchens im Sonnenzentrum etwa der potentiellen Energie eines Protons an der Sonnenoberfläche entspricht.

Zahlenwerte:

$$T = \frac{8}{27} \times 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \frac{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}}{6.96 \times 10^8 \text{ m} \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}}$$

$$= \frac{8 \times 6.67 \times 1.66 \times 1.99}{27 \times 6.96 \times 1.38} \times 10^7 \text{ K}$$

$$T = 6.8 \times 10^6 \text{ K}.$$

Die tatsächliche Temperatur im Sonneninnern beträgt in der Nähe des Zentrums etwa $15.6 \times 10^6 \text{ K}$. Unsere Abschätzung liegt also nur etwa einen Faktor zwei daneben, hat die richtige Größenordnung. Eine Berechnung des Drucks aus der oben gegebenen Formel liefert

$$\bar{p} = 1.59 \times 10^{14} \text{ Pa}.$$

Der tatsächliche Druck im Zentrum der Sonne erfüllt $p_Z > 2 \times 10^{16} \text{ Pa}$. Hier liegen wir also einen Faktor der Größenordnung 100 daneben.

Es ist klar, dass die Dichte ρ_Z im Sonnenzentrum größer ist als die mittlere Dichte ρ ($\rho_Z = 150 \text{ g/cm}^3$, $\rho = 1.41 \text{ g/cm}^3$). Wir haben als Druck einen mittleren Wert \bar{p} benützt, der erwartungsgemäß zu niedrig ausfällt. Da wir in der Gasgleichung effektiv eine mittlere Dichte ($\rho = M/V$) verwendet haben, die ebenfalls zu klein ist, kompensieren sich bei der Temperaturberechnung die Fehler von Druck und Dichte teilweise. Deshalb ist die Temperaturschätzung um einiges besser als die Druck- oder Dichteschätzung.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen. Die Besprechung erfolgt dann eine Woche später.

Teil B

1. Uran-Blei-Datierung

7 Pkt.

In dieser Aufgabe wollen wir einige Überlegungen anstellen, wie man mithilfe der bekannten Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls aus dem gemessenen Gehalt bestimmter Isotope in Gesteinen deren Alter bestimmen kann.

Für diese Altersbestimmung interessant sind, wie wir im Einzelnen sehen werden, die Zerfallsreihen der beiden Uran-Isotope ^{235}U und ^{238}U

- Uran-Actinium-Reihe: $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$; Halbwertszeit: $\tau_{235} = 7.04 \times 10^8 \text{ a}$
- Uran-Radium-Reihe: $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$; Halbwertszeit: $\tau_{238} = 4.47 \times 10^9 \text{ a}$

Das stabilste und häufigste Blei-Isotop ist ^{208}Pb (es hat einen doppelt magischen Kern), aber auch ^{206}Pb und ^{207}Pb sind stabil.

Folgende Erkenntnisse dienen als Richtschnur bei der Entwicklung einer Methode:

- Die Isotopenverhältnisse *eines* festen Elements in einer Probe können viel genauer bestimmt werden als Isotopenverhältnisse *verschiedener* Elemente.
- Das Uran im Sonnensystem stammt mit Ausnahme des in der Neuzeit von Menschen erzeugten aus der Zeit vor der Entstehung des Planetensystems. Wenigstens gilt dies für die zwei betrachteten Isotope ^{235}U und ^{238}U . Sie wurden ursprünglich in einer Supernova (oder mehreren) erzeugt. Natürliche Prozesse produzieren seit der Entstehung der Sonne diese Isotope praktisch nicht mehr, weil die Halbwertszeit aller noch schwereren Elemente (wie Plutonium), die in die betreffenden Isotope zerfallen könnten, so kurz sind, dass es sie nach ein paar Millionen Jahren nicht mehr in substantieller Menge gab. (Einzig das Isotop ^{234}U wurde und wird weiter produziert, weil es durch Zerfall von ^{238}U entsteht.)
- Die Häufigkeit der beiden Uranisotope ist in verschiedenen Gegenden der Erde verschieden, sie kommen natürlich in Uranerz häufiger vor als in anderen Gesteinen. Aber das *Verhältnis* ihrer Häufigkeiten ist auf der Erde (und im ganzen Sonnensystem) homogen; dies ist das aktuelle *Isotopenverhältnis* in allen Gesteinsarten auf der Erde! Bei einem durch die Gegebenheiten im solaren Urnebel bestimmten anfänglichen Isotopenverhältnis ist das später vorliegende Häufigkeitsverhältnis nur eine Funktion der seither verstrichenen Zeit, solange weder Prozesse auftreten, die neues Uran erzeugen, noch solche, die die beiden Isotope voneinander trennen (was chemische Prozesse gar nicht und physikalische nur sehr ineffizient tun). Es folgt dann allein aus den Halbwertszeiten der Isotope, der verstrichenen Zeit und dem Anfangsquotienten. Das Isotopenverhältnis $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ ist unsere Uhr, mit der wir Zeiten messen können. Darauf basiert die ganze Datierungsmethode, mit der Eigentümlichkeit, dass wir den gegenwärtigen Zeigerstand der Uhr kennen, nicht aber den des früheren Zeitpunkts, den wir ermitteln wollen.
- Für die Verhältnisse *stabiler* Isotope bei *niedrigeren* Ordnungszahlen gelten etwas andere Gesetzmäßigkeiten. Sind beide Isotope nicht Teil (also Endpunkt) einer radioaktiven Zerfallsreihe, so entstehen sie nicht neu, ihr Verhältnis bleibt also über die Zeit konstant. Das gilt zumindest für diejenigen Isotopenpaare, deren relativer Massenunterschied klein ist. Chemisch unterscheiden sich Isotope nicht, also müssen trennende Prozesse physikalischer Natur sein. Der relevante physikalische Unterschied ist aber der Massenunterschied der Atome. Beim Wasserstoff ist der groß; schweres Wasser hat eine Dichte von 1.105 g/cm^3 , könnte sich also in natürlichen Strömungen gegenüber normalem Wasser ab- oder anreichern. Aber bei Massenzahlen jenseits von 100

sind die physikalische Prozesse, die Isotope trennen, rar und ineffizient, wie oben schon bemerkt. Kann mindestens eines von zwei stabilen Isotopen durch radioaktiven Zerfall *entstehen*, dann ist das Isotopenverhältnis prinzipiell *variabel*. Es hängt aber anders als das Verhältnis nicht nachgebildeter zerfallender Isotope *nicht nur* von der Zeit ab. Nehmen wir zur Vereinfachung der Diskussion an, dass beide Isotope aus Zerfallsreihen entstehen, wie es in unserer Aufgabe für ^{207}Pb und ^{206}Pb ja der Fall ist. Dann sind an der Bildung von beiden normalerweise *verschiedene* chemische Elemente beteiligt. Die Bildungsraten hängen davon ab, in welcher Menge diese Elemente zur Verfügung gestellt werden, und da können chemische Prozesse Einfluss nehmen. Nun ist das Anfangselement der Zerfallsreihe zwar hier in beiden Fällen Uran, aber die Reihe geht über mehrere Zwischenstufen, die nicht der gleichen Elementsequenz entsprechen. Das deuten auch die Namen Uran-Actinium-Reihe für $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ und Uran-Radium-Reihe für $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ an. Dass wir trotz vieler Zwischenschritte mit einer einzigen Halbwertszeit rechnen dürfen, liegt daran, dass die Halbwertszeit des ersten Zerfalls in beiden Reihen die Gesamtzeit dominiert.

- Die Isotopenverhältnisse, wie sie bei der Entstehung alter Gesteine herrschten, sind nicht unbedingt bekannt. Aber sie sind für *stabile* Isotope bei gleicher Entstehungsart (z.B. Meteoritengestein im solaren Urnebel) gleich – das ist eine Homogenitätsannahme. (Für die Uranisotope kann sie natürlich nicht gemacht werden, denn da ist das Isotopenverhältnis ja eine Funktion der Zeit.)

Bezeichnen wir die gegenwärtige Zeit mit t_g , die Bildungszeit des zu untersuchenden Gesteins mit t_0 und setzen $\Delta t = t_g - t_0$, so gilt, wenn wir Häufigkeiten eines Isotops mit dessen Namen und einer Zeitkennzeichnung darstellen, offensichtlich:

$$\begin{aligned} {}^{235}\text{U} &\equiv {}^{235}\text{U}(t_g) = {}^{235}\text{U}_0 \times 2^{-\Delta t/\tau_{235}} \\ \Delta {}^{207}\text{Pb} &= {}^{235}\text{U}_0 - {}^{235}\text{U} = {}^{235}\text{U} \left(2^{\Delta t/\tau_{235}} - 1 \right) \\ R_1 &\equiv \frac{{}^{207}\text{Pb}}{{}^{204}\text{Pb}} = \frac{{}^{207}\text{Pb}_0}{{}^{204}\text{Pb}} + \frac{\Delta {}^{207}\text{Pb}}{{}^{204}\text{Pb}} \end{aligned}$$

Eine Häufigkeit ohne Index bezieht sich also auf die Gegenwart, eine mit Index 0 auf die Bildungszeit. $\Delta {}^{207}\text{Pb}$ ist die Differenz zwischen der gegenwärtigen und der zur Zeit t_0 existierenden Menge an ^{207}Pb . Analoge Beziehungen gelten für den Zerfall von ^{238}U , und die entsprechende relative Häufigkeit von ^{206}Pb bezeichnen wir mit R_2 .

^{204}Pb , dessen Häufigkeit im Nenner steht, ist zwar kein stabiles Bleisotop. Aber seine Halbwertszeit ist größer als 1.4×10^{17} a, d.h., es zerfällt mehr als 10^7 mal langsamer als die beiden Uranisotope. Auf der Zeitskala der gegenwärtigen Lebensdauer des Universums kann die in einer Probe durch Zerfall abhanden kommende Menge an ^{204}Pb guten Gewissens vernachlässigt werden, es ist also „nahezu“ stabil. Zum anderen gibt es keine Zerfallsreihe, die ^{204}Pb liefert. Damit nimmt die Häufigkeit von ^{204}Pb in einem Gestein nach dessen Entstehung auch nicht mehr zu. Es gilt also in extrem guter Näherung $^{204}\text{Pb} = {}^{204}\text{Pb}_0$. Hingegen gibt es eine Zerfallsreihe, die auf ^{208}Pb führt ($^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ mit einer Halbwertszeit von 1.405×10^{10} a). Deshalb ist es nicht günstig, in der Definition von R_1 und R_2 in den Nenner die Menge an ^{208}Pb zu schreiben.

Messen können wir im Prinzip alle gegenwärtigen Größen, unbekannt sind alle Größen mit Index 0, also $^{235}\text{U}_0$ und $^{238}\text{U}_0$, aber auch die zur Gesteinsbildungszeit bereits vorhandenen Häufigkeiten der stabilen Isotope $^{206}\text{Pb}_0$ und $^{207}\text{Pb}_0$.

Misst man jedoch $R_i(A)$ und $R_i(B)$, $i = 1, 2$ für zwei vor verschiedenen Zeiten Δt_A und Δt_B entstandene Gesteine derselben Art, so kann man $^{206}\text{Pb}_0$ und $^{207}\text{Pb}_0$ eliminieren (die sind für beide Gesteinssorten gemäß der obigen Homogenitätsannahme dieselben).

- (a) Führen Sie diese Elimination durch, d.h. entwickeln Sie eine Formel für $q_{AB} \equiv (R_1(A) - R_1(B))/(R_2(A) - R_2(B))$. (2 Pkt.)
 Grundsätzlich bräuchten wir den Nenner ^{204}Pb in der Definition von $R_{1/2}$ nicht, denn wir interessieren uns nur für das Verhältnis q_{AB} , aus dem wir (bei nicht zu unterschiedlichen Zeiten Δt_A und Δt_B) auf das Verhältnis der Uranisotope zur Entstehungszeit der Gesteine schließen können. Da wir jedoch dieses Verhältnis nicht in einer Gesteinsprobe messen können, müssten wir ohne ein drittes Bleisotop zur Ermittlung der Differenzen $R_1(A) - R_1(B)$ bzw. $R_2(A) - R_2(B)$ die *Absolutwerte* von ^{207}Pb und ^{206}Pb in beiden Proben messen, was sehr viel ungenauer ist als die Messung von Isotopenverhältnissen per Massenspektrometrie.
- (b) Nehmen Sie im Weiteren explizit an, dass $|\Delta t_A - \Delta t_B| \ll \tau_{235}, \tau_{238}$ und lösen Sie nach Δt_A (oder Δt_B) auf. (3 Pkt.)
- (c) Berechnen Sie das ungefähre Alter zweier Gesteinsproben, in denen die gemessenen relativen Häufigkeiten von ^{207}Pb und ^{206}Pb die Werte $R_1(A) = 0.4205$, $R_2(A) = 0.4590$ sowie $R_1(B) = 0.4197$, $R_2(B) = 0.4586$ haben. Außerdem ist bekannt, dass das gegenwärtige Verhältnis der beiden Uran-Isotope $^{238}\text{U}/^{235}\text{U} = 137.88$ ist. (2 Pkt.)

Lösung:

Die Häufigkeiten, um die es hier geht, ergeben sich einerseits aus den *primordialen* Anfangsanteilen von ^{207}Pb und ^{206}Pb , d.h. den Anteilen, die nicht durch den Zerfall instabiler Isotope anderer Atome entstanden sind, und andererseits aus den durch radioaktiven Zerfall entstandenen Anteilen. Das primordiale Isotopenverhältnis $^{207}\text{Pb}_0/^{206}\text{Pb}_0$ ist homogen. Sind die chemischen und dynamischen Verhältnisse bei der Entstehung gleichartiger Gesteine gleich, dann sollten die Absolutanteile an Blei gleich sein und damit auch die primordialen Anteile an Bleisotopen. Die nicht primordialen Anteile sollten auch gleich sein, wenn die Chemie die in sie zerfallenden Elemente während des Entstehungsprozesses der Gesteine in gleichen Mengen zur Verfügung stellt oder entzieht (ein chemischer Prozess könnte z.B. eine lösliche Radiumverbindung produzieren, die im Verlauf der Gesteinsentstehung ausgewaschen wird). So etwa lässt sich die Homogenitätsannahme rechtfertigen.

(a) Für die Differenz von R_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} R_1(A) - R_1(B) &= \frac{^{207}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}} + \frac{\Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_A)}{^{204}\text{Pb}} - \frac{^{207}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}} - \frac{\Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_B)}{^{204}\text{Pb}} \\ &= \frac{\Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_A) - \Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_B)}{^{204}\text{Pb}} \end{aligned}$$

sowie

$$R_2(A) - R_2(B) = \frac{\Delta ^{206}\text{Pb}(\Delta t_A) - \Delta ^{206}\text{Pb}(\Delta t_B)}{^{204}\text{Pb}},$$

also

$$q_{AB} = \frac{\Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_A) - \Delta ^{207}\text{Pb}(\Delta t_B)}{\Delta ^{206}\text{Pb}(\Delta t_A) - \Delta ^{206}\text{Pb}(\Delta t_B)}$$

und können von hier ab alle Bleisotope außer ^{207}Pb und ^{206}Pb außer Acht lassen.

Mit den Gleichungen der Aufgabenstellung lässt sich q_{AB} wie folgt umformen

$$q_{AB} = \frac{^{235}\text{U} (2^{\Delta t_A/\tau_{235}} - 1) - ^{235}\text{U} (2^{\Delta t_B/\tau_{235}} - 1)}{^{238}\text{U} (2^{\Delta t_A/\tau_{238}} - 1) - ^{238}\text{U} (2^{\Delta t_B/\tau_{238}} - 1)}$$

und wir erhalten:

$$q_{AB} = \frac{{}^{235}\text{U} \cdot 2^{\Delta t_A / \tau_{235}} - 2^{\Delta t_B / \tau_{235}}}{{}^{238}\text{U} \cdot 2^{\Delta t_A / \tau_{238}} - 2^{\Delta t_B / \tau_{238}}} \quad (1.1)$$

- (b) Es ist klar, dass eine einzige Gleichung wie (1.1) nicht ausreichen kann, die zwei Zeiten Δt_A und Δt_B zu bestimmen. Nimmt man die beiden Zeiten jedoch als nahezu gleich an, so kann man eine von beiden (oder ihren Mittelwert) näherungsweise berechnen.

$$\begin{aligned} q_{AB} &= \frac{{}^{235}\text{U}}{{}^{238}\text{U}} 2^{\Delta t_A \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right)} \frac{1 - 2^{(\Delta t_B - \Delta t_A) / \tau_{235}}}{1 - 2^{(\Delta t_B - \Delta t_A) / \tau_{238}}} \\ &= \frac{{}^{235}\text{U}}{{}^{238}\text{U}} 2^{\Delta t_A \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right)} \frac{1 - 1 - \ln 2 (\Delta t_B - \Delta t_A) / \tau_{235} + \mathcal{O}((\Delta t_B - \Delta t_A)^2)}{1 - 1 - \ln 2 (\Delta t_B - \Delta t_A) / \tau_{238} + \mathcal{O}((\Delta t_B - \Delta t_A)^2)} \\ &= \frac{{}^{235}\text{U}}{{}^{238}\text{U}} 2^{\Delta t_A \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right)} \frac{\tau_{238}}{\tau_{235}} + \mathcal{O}(\Delta t_B - \Delta t_A), \end{aligned}$$

wo wir gemäß $2^x = e^{\ln 2 x} = 1 + \ln 2 x + \mathcal{O}(x^2)$ entwickelt haben. Durch Logarithmieren erhalten wir:

$$\ln q_{AB} = \ln \frac{{}^{235}\text{U}}{{}^{238}\text{U}} + \ln 2 \Delta t_A \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right) + \ln \frac{\tau_{238}}{\tau_{235}},$$

was sich leicht nach Δt_A auflösen lässt:

$$\Delta t_A = \frac{\ln \frac{\tau_{235}}{\tau_{238}} + \ln \frac{{}^{238}\text{U}}{{}^{235}\text{U}} + \ln \frac{R_1(A) - R_1(B)}{R_2(A) - R_2(B)}}{\ln 2 \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right)}. \quad (1.2)$$

Für Δt_B erhält man im Rahmen dieser Näherung dasselbe Ergebnis.

- (c) Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\tau_{235}}{\tau_{238}} &= \ln \frac{7.04}{44.7} = -1.84837 \\ \ln \frac{{}^{238}\text{U}}{{}^{235}\text{U}} &= \ln 137.88 = 4.92638 \\ q_{AB} &= \frac{0.4205 - 0.4197}{0.4590 - 0.4586} = 2.0 \\ \frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} &= 1.1967 \times 10^{-9} \text{a}^{-1} \end{aligned}$$

Endergebnis:

$$\Delta t_A = 4.55 \times 10^9 \text{a}.$$

Im Teil B können **7 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an antonia.schulz@ovgu.de.