Teil A

3. Stellare Aberration und "absolute" Geschwindigkeit **12 Pkt.**

Beobachtet man einen Stern von der Erde aus, so erscheint er gegenüber seiner „wahren" (durch zwei Winkel auf der Himmelskugel gegebenen) Position etwas verschoben. Der Grund dafür liegt in der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und der Bewegung der Erde um die Sonne. Diese Aberration hängt (in der speziellen Relativitätstheorie, bzw. bei flachem Raum) von der Relativgeschwindigkeit von Stern und Erde ab und ist für Sterne unbeobachtbar – man hat keinen Zugang zur „wahren" Position des Sterns, d.h., zu dem Ort, an dem man ihn beobachten würde, wenn Erde und Stern sich zueinander in Ruhe befänden. Was man beobachten *könnte*, sind die verschiedenen Winkel, unter denen der Stern für zwei verschiedene zueinander bewegte Beobachter erschiene, die ihn am selben Ort zur gleichen Zeit beobachten. Was man tatsächlich *beobachtet*, sind die unterschiedlichen Winkel, unter denen der Stern in verschiedenen Bewegungszuständen der Erde erscheint, also die Unterschiede, die ein einzelner Beobachter, dessen Bewegung variiert, zu verschiedenen Zeiten feststellt. Diese *stellare Aberration* ist eine periodische Bewegung des Sterns um eine mittlere Position. Sie beträgt maximal ca. 20 Bogensekunden und ist *unabhängig von der Geschwindigkeit des beobachteten Sterns*.

Diese unerwartete Tatsache führt immer wieder zu Verwirrung, weil sie Aussagen der Relativitätstheorie zu widersprechen scheint, nach der es keinen Unterschied machen sollte, ob der Stern sich bewegt und die Erde ruht oder umgekehrt. Wenn Aberration aber nur von der Geschwindigkeit des Beobachters, nicht aber von der des beobachteten Objekts abhängt, scheint das falsch zu sein, die vom Relativitätsprinzip geforderte Symmetrie verletzt.

In einem Artikel von G. Sardin (Measure of the absolute speed through the Bradley aberration of light beams on a three-axis frame, Europhys. Lett. **53**, (2001) 310) wird ein Gerät beschrieben, mit dem es möglich sein soll, *absolute* Geschwindigkeiten zu messen. Dieses Gerät beruht darauf, eine Lichtquelle mit einem Beobachter mitzubewegen, zu zwei Zeitpunkten zwei verschiedene Aberrationen zu messen und daraus die Geschwindigkeit des Beobachters zu bestimmen.[1] Streng genommen ist das auch keine absolute Geschwindigkeitsmessung, weil man nur den Unterschied der Geschwindigkeiten vor und nach der Messung bestimmt hat, aber man könnte im Prinzip auf der Basis lokaler Messungen eine Geschwindigkeitsskala eichen, die Geschwindigkeiten direkt mit Aberrationswinkeln korreliert. Das widerspräche dem Relativitätsprinzip, nach dem lokale Messungen in allen Inertialsystemen gleich ablaufen, also unterschiedlichen Geschwindigkeiten nicht unterschiedliche gemessene Winkel entsprechen können.

(a) Betrachten Sie zunächst einen Stern, der sich im Koordinatensystem Σ in Ruhe befindet und einen Beobachter, der sich mit der Geschwindikeit $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$ bewegt. Im Ruhesystem Σ' des Betrachters bewegt sich der Stern dann mit der Geschwindigkeit $-\boldsymbol{V}$. (3 Pkt.)

Ein Lichtstrahl wird vom Stern unter einem Winkel ϑ zur x-Achse ausgesendet. Zeigen Sie, dass für den vom Beobachter gemessenen Winkel ϑ' gilt:

$$\tan\frac{\vartheta'}{2} = \tan\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{c-V}{c+V}} \tag{3.1}$$

[1] Hier ist prinzipiell auch die Messung der wahren Aberration möglich, die man auch als Unterschied in den Richtungen des von der Lichtquelle ausgesendeten und des vom Sensor empfangenen Lichtstrahls definieren kann.

Betrachten Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor des Lichtstrahls in beiden Systemen (nehmen Sie an, er liegt in der xy-Ebene) und wählen Sie die Winkel so, dass sie bei $V = 0$ Wechselwinkel wären. (Sonst müsste einer der Tangens zu einem Kotangens werden.)

Hinweis: Das System Σ' bewegt sich mit $\boldsymbol{V}$ gegenüber Σ. In Σ' bewege sich ein Körper mit $\boldsymbol{u}'$. Die Geschwindigkeit des Körpers in Σ ist $\boldsymbol{u}$ und wird mit dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten berechnet. Es lautet in vektorieller Form:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\parallel + \boldsymbol{u}_\perp = \frac{\boldsymbol{u}'_\parallel + \boldsymbol{V}}{1 + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}'/c^2} + \frac{\boldsymbol{u}'_\perp}{\gamma(1 + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}'/c^2)}\,, \tag{3.2}$$

wobei $\boldsymbol{u}_\parallel \equiv \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{u})/V^2$ und $\boldsymbol{u}_\perp = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\parallel$ die zur Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ der beiden Systeme parallele und senkrechte Geschwindigkeitskomponente von $\boldsymbol{u}$ sind. $\boldsymbol{u}'_\parallel$ und $\boldsymbol{u}'_\perp$ sind die entsprechenden Größen in Σ'. Ferner ist $\gamma = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Eine nützliche trigonometrische Formel ist

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}\,. \tag{3.3}$$

(b) Setzen Sie $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, nehmen Sie an, dass $V/c \ll 1$ und leiten Sie aus (3.1) die in der Vorlesung besprochene nichtrelativistische Näherung (2 Pkt.)

$$\sin\alpha = \frac{V}{c}\sin\vartheta' \tag{3.4}$$

her. Offensichtlich muss auch $\alpha \ll 1$ gelten, was man ausnützen kann.

(c) Führen Sie nun dieselbe Betrachtung wie in Teil (a) aus Sicht eines dritten Systems $\tilde{\Sigma}$ durch, in dem der Stern ruht und der Beobachter sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegt $\left(\tilde{\Sigma} = \Sigma\right)$. Wie lautet der Winkel $\tilde{\vartheta}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ'? (2 Pkt.)

(d) Betrachten Sie nun zwei Beobachter, die sich mit Geschwindgkeiten $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ bewegen, in dem Moment, in dem sie sich treffen. Beide beobachten einen Stern, der sich mit einer unbekannten Geschwindigkeit $\boldsymbol{W}$ bewegt und messen eine *relative* Aberration $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Der *wahre* Sichtwinkel ϑ, gemessen im Ruhesystem des Sterns, ist unbekannt. Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den gemessenen Winkeln ϑ_1 und ϑ_2 und zeigen Sie, dass dieser nur von der Relativgeschwindigkeit (3 Pkt.)

$$V_{21} = \frac{V_2 - V_1}{1 - \frac{V_1 V_2}{c^2}} \tag{3.5}$$

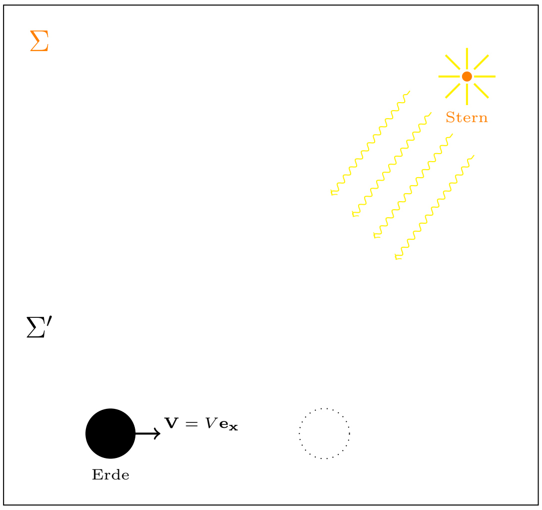
abhängt.

Hinweis: Drücken Sie die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 durch die Relativgeschwindigkeiten zum Stern $V^S_{1,2}$ sowie den Winkel ϑ aus und ersetzen Sie diese dann durch die Geschwindigkeiten V_1, V_2 und W und eliminieren Sie ϑ.

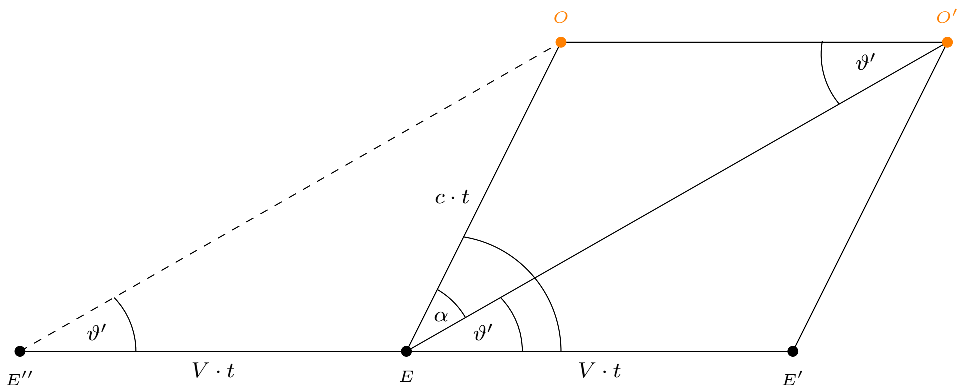
(e) In dem in der Einleitung beschriebenen Gerät existiert nur ein Beobachter, der zu zwei verschiedenen Zeiten misst (mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten V_1 und V_2). Anders als beim Stern ist die Geschwindigkeit der Lichtquelle nicht konstant, sondern jeweils gleich der Geschwindigkeit des Beobachters ($W_{1,2} = V_{1,2}$). Wie groß ist die auf diese Weise gemessene Aberration? (2 Pkt.)

Lösung:

(a) In Anlehnung an die Vorlesung wird das Setting aus Kapitel 1.2.3 betrachtet. Der Stern befinde sich weit genug vom Beobachter entfernt, sodass alle seine Lichtstrahlen parallel und im gleichen Winkel zum Beobachter gelangen.



Im Sternsystem haben die Lichtstrahlen den Einfallswinkel $\vartheta = \vartheta' + \alpha$. Es werde der Lichtstrahl betrachtet, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den Punkt O erreicht. Ein Beobachter der diesen Lichtstrahl bei E empfängt, befand sich zu t_0 bei E''. In der Zeit t, in der der Lichtstrahl $\overline{OE}$ überwindet, legt der Beobachter den Weg $\overline{E''E} = V \cdot t$ zurück. Es bezeichne O den Eingang eines Fernrohrs. Damit der Lichtstrahl zum Zeitpunkt t den Boden des Fernrohrs erreicht, muss jenes unter dem Winkel ϑ' ausgerichtet sein. Dies ist der Winkel unter dem der Beobachter den Stern sieht.



Für die Geschwindigkeitskomponenten u'_x und u'_y des Lichtstrahls gilt im Beobachtersystem

$$\tan\vartheta' = \frac{u'_y}{u'_x}, \quad u'_x = -c \cdot \cos\vartheta', \quad u'_y = -c \cdot \sin\vartheta'. \tag{3.6}$$

Der Betrag der Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Systemen dieselbe, nicht jedoch ihre Richtung. Für die Transformation ins Sternsystem nutzt man die Gleichungen aus (3.2) mit $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{u}'_{\parallel} = u'_x\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{u}'_{\perp} = u'_y\boldsymbol{e}_y$:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)}, \quad \gamma = \left(1 - {}^{V^2}/_{c^2}\right)^{-1/2} \tag{3.7}$$

Hier fallen die Strahlen unter dem Winkel ϑ ein

$$u_x = -c \cdot \cos\vartheta, \quad u_y = -c \cdot \sin\vartheta. \tag{3.8}$$

Setzt man (3.6), (3.8) in (3.7) ein erhält man:

$$-c \cdot \cos\vartheta = \frac{-c\cdot\cos\vartheta' + V}{1 - \frac{c\cdot\cos\vartheta' V}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta' - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'}$$
$$-c \cdot \sin\vartheta = \frac{-c\cdot\sin\vartheta'}{\gamma\left(1 - \frac{c\cdot\cos\vartheta' V}{c^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1 - {}^{V^2}/_{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'}$$

Mithilfe von (3.3) lässt sich nach ein paar Umformungen die gesuchte Gleichung für $\tan\frac{\vartheta}{2}$ gewinnen.

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\vartheta}{2} &= \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1 - {}^{V^2}/_{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos\vartheta' - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'}} \\
&= \frac{\sin\vartheta'\sqrt{\frac{c^2 - V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'} \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta'}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta' + \cos\vartheta' - \frac{V}{c}} \\
&= \frac{\sin\vartheta'\sqrt{(c-V)(c+V)}}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta' + \cos\vartheta' - \frac{V}{c}} \\
&= \frac{\sin\vartheta'\sqrt{(c-V)(c+V)}}{c - V\cos\vartheta' + c\cos\vartheta' - V} = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{(c-V)(c+V)}}{c - V + \cos\vartheta'(c-V)} \\
&= \frac{\sin\vartheta'\sqrt{(c-V)(c+V)}}{(c-V)(1+\cos\vartheta')} = \frac{\sin\vartheta'}{1+\cos\vartheta'}\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}
\end{aligned}$$

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \tan\frac{\vartheta'}{2}\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}$$

(b) Mit $\vartheta = \vartheta' + \alpha$ wird unsere Formel aus Teil (a)

$$\frac{\sin\vartheta'}{1+\cos\vartheta'} = \frac{\sin(\vartheta'+\alpha)}{1+\cos(\vartheta'+\alpha)}\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

und wir können wegen ${}^{V}/_{c} \ll 1$ die Wurzel entwickeln:

$$\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = \sqrt{\frac{\left(1 - V/c\right)^2}{1 - (V/c)^2}} = 1 - \frac{V}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{V}{c}\right)^2.$$

Da mit $V/c \to 0$ auch $\alpha \to 0$ geht, ist für $V/c \ll 1$ auch $\alpha \ll 1$ und der Vorfaktor der Wurzel kann ebenfalls entwickelt werden:

$$f(\alpha) = \frac{\sin(\vartheta' + \alpha)}{1 + \cos(\vartheta' + \alpha)} = \frac{\sin\vartheta' \cos\alpha + \sin\alpha\cos\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'\cos\alpha - \sin\vartheta'\sin\alpha}$$

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = {} & \frac{-\sin\vartheta'\sin\alpha + \cos\alpha\cos\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'\cos\alpha - \sin\vartheta'\sin\alpha} \\ & - \frac{(\sin\vartheta'\cos\alpha + \sin\alpha\cos\vartheta')\,(-\cos\vartheta'\sin\alpha - \sin\vartheta'\cos\alpha)}{(1 + \cos\vartheta'\cos\alpha - \sin\vartheta'\sin\alpha)^2} \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'}, \qquad f'(0) = \frac{\cos\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \frac{\sin^2\vartheta'}{(1 + \cos\vartheta')^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\vartheta' + \alpha)}{1 + \cos(\vartheta' + \alpha)} &= \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \left(\frac{\cos\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \frac{\sin^2\vartheta'}{(1 + \cos\vartheta')^2}\right)\alpha + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right) \\ &= \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \left(\frac{\cos\vartheta' + \cos^2\vartheta' + \sin^2\vartheta'}{(1 + \cos\vartheta')^2}\right)\alpha + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right) \\ &= \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \frac{\alpha}{1 + \cos\vartheta'} + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right) \end{aligned}$$

Für $\alpha \ll 1$ gilt in erster Ordnung $\sin\alpha \approx \alpha$:

$$\frac{\sin(\vartheta' + \alpha)}{1 + \cos(\vartheta' + \alpha)} = \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\vartheta'} + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$$

Setzen wir beide Entwicklungen in die Ausgangsgleichung ein und vernachlässigen Terme der Ordnung $\sin\alpha \cdot V/c$, so erhalten wir:

$$\frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} = \frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\vartheta'} - \frac{V}{c}\frac{\sin\vartheta'}{1 + \cos\vartheta'},$$

was sich zu dem Gewünschten

$$\sin\alpha = \frac{V}{c}\sin\vartheta'$$

vereinfachen lässt.

(c) Die Betrachtung dieses Falls ist analog zur Teilaufgabe (a). Hier wird nur in (3.7) V mit $-V$ ersetzt (Relativitätsprinzip). Die Komponenten der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}'$ im bewegten Beobachtersystem berechnen sich unter Verwendung der Geschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{u}}$ im Sternsystem:

$$u'_x = \frac{\tilde{u}_x - V}{1 - \frac{\tilde{u}_x V}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{\tilde{u}_y}{\gamma\left(1 - \frac{\tilde{u}_x V}{c^2}\right)}.$$

$$\tan\frac{\vartheta'}{2} = \frac{\sin\tilde{\vartheta}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{V}{c}\cos\tilde{\vartheta}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\cos\tilde{\vartheta}+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\tilde{\vartheta}}} = \ldots = \tan\frac{\tilde{\vartheta}}{2}\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}$$

Der Aberrationswinkel $\vartheta = \tilde{\vartheta}$ hängt nur von der Relativgeschwindigkeit zwischen Stern- und Beobachtersystem ab.

(d) Das Koordinatensystem werde so gewählt, dass sich Stern und Beobachter in x-Richtung bewegen. Bei der Berechnung des Betrages r_i ihrer Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{r}_i = r_i \boldsymbol{e}_x$ müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden. Aus der Sicht des Beobachters ist

$$r_i = \frac{V_i - W}{1 - V_i W/c^2}.$$

In Σ_i' werde die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_i'$ gemessen. Wie zuvor wird die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ in Σ mit (3.2) bestimmt:

$$\boldsymbol{u}_\parallel = \frac{\boldsymbol{u}_{i\parallel}' + \boldsymbol{r}_i}{1 + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_i'/c^2}, \quad \boldsymbol{u}_\perp = \frac{\boldsymbol{u}_{i\perp}'}{\gamma(1 + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_i'/c^2)}, \quad \gamma = \left(1 - \boldsymbol{r}_i{}^2/c^2\right)^{-1/2}$$

$\boldsymbol{r}_i$ ist nach Voraussetzung parallel zur x-Achse. Damit ist $\boldsymbol{u}_\parallel = u_{ix}\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{u}_\perp = u_{iy}\boldsymbol{e}_y$ mit

$$u_{ix} = \frac{u_{ix}' + r_i}{1 + r_i u_{ix}'/c^2}, \qquad u_{iy} = \frac{u_{iy}'}{\gamma(1 + r_i u_{ix}'/c^2)}.$$

Man rechnet ganz analog zu Teilaufgabe (a) und erhält für $i = 1, 2$:

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \tan\frac{\vartheta_i'}{2}\sqrt{\frac{c + r_i}{c - r_i}}.$$

Nun soll ϑ eliminiert werden:

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{c + r_1}{c - r_1}} = \tan\frac{\vartheta_2'}{2}\sqrt{\frac{c + r_2}{c - r_2}}$$

$$\tan\frac{\vartheta_2'}{2} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{(c + r_1)(c - r_2)}{(c - r_1)(c + r_2)}} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{\left(c + \frac{V_1 - W}{1 - V_1 W/c^2}\right)\left(c - \frac{V_2 - W}{1 - V_2 W/c^2}\right)}{\left(c - \frac{V_1 - W}{1 - V_1 W/c^2}\right)\left(c + \frac{V_2 - W}{1 - V_2 W/c^2}\right)}}$$

Betrachte den Bruch unter der Wurzel:

$$= \frac{c^2 - \frac{cV_2 - cW}{1 - V_2 W/c^2} + \frac{cV_1 - cW}{1 - V_1 W/c^2} - \frac{(V_1 - W)(V_2 - W)}{(1 - V_1 W/c^2)(1 - V_2 W/c^2)}}{c^2 + \frac{cV_2 - cW}{1 - V_2 W/c^2} - \frac{cV_1 - cW}{1 - V_1 W/c^2} - \frac{(V_1 - W)(V_2 - W)}{(1 - V_1 W/c^2)(1 - V_2 W/c^2)}}$$

$$= \frac{c^2\left(1 - \frac{V_1 W}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V_2 W}{c^2}\right) - c(V_2 - W)\left(1 - \frac{V_1 W}{c^2}\right) + c(V_1 - W)\left(1 - \frac{V_2 W}{c^2}\right) - (V_1 - W)(V_2 - W)}{c^2\left(1 - \frac{V_1 W}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V_2 W}{c^2}\right) + c(V_2 - W)\left(1 - \frac{V_1 W}{c^2}\right) - c(V_1 - W)\left(1 - \frac{V_2 W}{c^2}\right) - (V_1 - W)(V_2 - W)}$$

Nach Erweitern mit c^2 erhält man nach einigen elementaren Umformungen für den Zähler

$$\begin{aligned}
&\left(c^2 - V_1W\right)\left(c^2 - V_2W\right) - c(V_2 - W)\left(c^2 - V_1W\right) + c(V_1 - W)\left(c^2 - V_2W\right) \\
&\qquad - c^2\left(V_1 - W\right)\left(V_2 - W\right) \\
&= c^4 - c^2V_1W - c^2V_2W + V_1V_2W^2 - c\left(c^2V_2 - c^2W - V_1V_2W + V_1W^2\right) \\
&\qquad + c\left(c^2V_1 - c^2W - V_1V_2W + V_2W^2\right) - c^2\left(V_1V_2 - V_1W - V_2W + W^2\right) \\
&= c^4 + V_1V_2W^2 + c\big(c^2(V_1 - V_2) - (V_1 - V_2)W^2\big) - c^2\left(V_1V_2 + W^2\right) \\
&= c^2(c^2 - W^2) - V_1V_2(c^2 - W^2) + c(V_1 - V_2)\big(c^2 - W^2\big) \\
&= (c^2 - W^2)\big(c^2 + c(V_1 - V_2) - V_1V_2\big) \\
&= (c - W)(c + W)(c + V_1)(c - V_2)
\end{aligned}$$

Die Rechnung für den Nenner verläuft analog. Das Ergebnis lautet:

$$\tan\frac{\vartheta_2'}{2} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{(c-W)(c+W)(c+V_1)(c-V_2)}{(c-W)(c+W)(c-V_1)(c+V_2)}} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{(c+V_1)(c-V_2)}{(c-V_1)(c+V_2)}} \tag{3.9}$$

Der Bruch kann noch wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{(c+V_1)(c-V_2)}{(c-V_1)(c+V_2)} &= \frac{\big(c^2 + c(V_1 - V_2) - V_1V_2\big)}{\big(c^2 - c(V_1 - V_2) - V_1V_2\big)} = \frac{\left(\left(1 - \frac{V_1V_2}{c^2}\right) + \frac{1}{c}(V_1 - V_2)\right)}{\left(\left(1 - \frac{V_1V_2}{c^2}\right) - \frac{1}{c}(V_1 - V_2)\right)} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{\frac{1}{c}(V_1 - V_2)}{1 - \frac{V_1V_2}{c^2}}\right)}{\left(1 - \frac{\frac{1}{c}(V_1 - V_2)}{1 - \frac{V_1V_2}{c^2}}\right)} = \frac{\frac{1}{c}\left(c + \frac{V_1 - V_2}{1 - \frac{V_1V_2}{c^2}}\right)}{\frac{1}{c}\left(c - \frac{V_1 - V_2}{1 - \frac{V_1V_2}{c^2}}\right)} = \frac{c - V_{21}}{c + V_{21}}
\end{aligned}$$

mit V_{21} aus (3.5). Folglich ist die Beziehung zwischen den beiden gemessenen Winkeln

$$\tan\frac{\vartheta_2'}{2} = \tan\frac{\vartheta_1'}{2}\sqrt{\frac{c - V_{21}}{c + V_{21}}}$$

tatsächlich nur von der Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter abhängig.

(e) Die Geschwindigkeit der Lichtquelle ist nicht mehr konstant W, sondern unterschiedlich für beide Messungen. Man rechnet nun mit der Relativgeschwindigkeit

$$r_i = \frac{V_i - W_i}{1 - {}^{V_iW_i}/_{c^2}} = 0$$

Damit gilt vor der Geschwindigkeitsänderung $\tan\frac{\vartheta_1'}{2} = \tan\frac{\vartheta_1}{2}$, d.h., der Beobachtungswinkel ist gleich dem wahren Winkel. Nach der Geschwindigkeitsänderung gilt $\tan\frac{\vartheta_2'}{2} = \tan\frac{\vartheta_2}{2} = \tan\frac{\vartheta_1}{2}$, wenn die Geschwindigkeitsänderung nicht zu Schwingungen der die Lichtquelle haltenden Stütze führt, bzw., nachdem diese Schwingungen abgeklungen sind. Bei einer sehr großen Entfernung zwischen Lichtquelle und Beobachter kann zwischen dem Anfangs- und Endzustand ein anderer Winkel auftreten, etwa weil die Quelle dem Geschwindigkeitswechsel nicht instantan folgt oder weil das Licht für einen kurzen Augenblick nach dem Geschwindigkeitswechsel für den Beobachter noch von einem ungeänderten Ort der Quelle zu kommen scheint. Die zweite Zeitspanne ist aber bei normalen Abmessungen des Geräts (im Meter- oder maximal Kilometerbereich) sehr kurz, entsprechend der Lichtlaufzeit. Und sie bedeutet natürlich nicht Messung einer absoluten Geschwindigkeit sondern die Beobachtung einer kurzzeitigen Asynchronität der Bewegung von Beobachter und Quelle.

4. Thermische Zeitskala **3 Pkt.**

Die *thermische Zeitskala* ist die Zeit, in welcher der Stern seine thermische Energie ohne Energieproduktion abstrahlen würde und entspricht der Zeit, welche die Strahlung von ihrer Entstehung nahe am Sternenmittelpunkt bis zur Oberfläche benötigt. Man kann die thermische Zeitskala abschätzen, indem man annimmt, dass Photonen aus dem Inneren der Sonne aufgrund dauernder Absorption und Reemission eine Zufallswanderung unternehmen. Beträgt die mittlere freie Weglänge pro Schritt einer solchen Wanderung ℓ, so hat sich der „Wanderer" nach N Schritten im Mittel um eine Strecke $\sqrt{N}\,\ell$ von seinem Ausgangspunkt entfernt. Nehmen Sie an, dass die mittlere freie Weglänge eines Photons überall in der Sonne dieselbe ist und berechnen Sie unter der Annahme $\ell = 10^{-4}$ m die Wegstrecke, die es auf dem Weg vom Mittelpunkt bis zum Rand der Sonne zurücklegen muss, und wie lange es dafür braucht.

Erwarten Sie, dass das korrekte Ergebnis größer oder kleiner als diese Abschätzung wird? (Es unterscheidet sich um etwa eine Größenordnung.)

Zahlenwerte: Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^8$ m, Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$.

Lösung: Photonenirrweg in Schritten von $\ell \rightsquigarrow$ zurückgelegter mittlerer quadratischer Abstand $L = \sqrt{N}\ell$ nach N Schritten.

Die Dauer für Zurücklegen von L berechnet sich aus dem Quotient von Gesamtweg und Geschwindigkeit: $\Delta t = \dfrac{N\ell}{c}$

Sonnenradius $R \Rightarrow$ mit $L = R = \sqrt{N}\ell$:

$$N = \left(\frac{R}{\ell}\right)^2 ,$$

$$\Delta t = \left(\frac{R}{\ell}\right)^2 \frac{\ell}{c} = \frac{R^2}{\ell c} .$$

Die mittlere Propagationsgeschwindigkeit $\bar{v} = \dfrac{R}{\Delta t} = \dfrac{\ell}{R} c$ ist also um den Faktor $\ell/R \approx 1.4 \times 10^{-13}$ gegenüber der Lichtgeschwindigkeit verkleinert.

Zahlenwerte:

$$\Delta t = \frac{6.96^2 \times 10^{16}\,\mathrm{m}^2}{10^{-4}\,\mathrm{m} \times 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = \frac{6.96^2}{3} \times 10^{12}\,\mathrm{s} = 16.147 \times 10^{12}\,\mathrm{s}\,,$$

$$\boxed{\Delta t = 1.61 \times 10^{13}\,\mathrm{s} = 5.13 \times 10^5\,\mathrm{a}}$$

In dieser Rechnung wurde eine konstante mittlere Weglänge der Photonen angenommen. Im Sonneninneren wird die Dichte um etwa einen Faktor 150 größer als die mittlere Dichte, was eine deutliche Verkürzung der mittleren Weglänge zur Folge hat, während im Außenbereich die mittlere Dichte durch die lokale Dichte unterschritten wird. Die Gesamtstrecke, die ein Photon zurücklegen muss, wird also zerlegt in Abschnitte mit geringerer mittlerer Geschwindigkeit und solche mit höherer mittlerer Geschwindigkeit. Bliebe der Gesamtmittelwert unverändert, so müsste die Gesamtzeit ansteigen, denn wenn man eine gegebene Strecke (Bsp. 200 km) zur Hälfte mit einer Geschwindigkeit (50 km/h) und zur anderen Hälfte mit einer anderen Geschwindigkeit fährt (150 km/h), so ist die Gesamtdauer ($2\frac{2}{3}$ h) immer größer als wenn man die ganze Strecke mit dem (arithmetischen) Mittelwert der Geschwindigkeiten (100 km/h, 2 h) fährt.

Die wirkliche thermische Zeitskala beträgt etwa 2×10^7 a, ist also ungefähr einen Faktor 40 größer als das Ergebnis unserer vereinfachten Rechnung. Ein Gamma-Quant, das im Zentrum der Sonne entsteht, braucht also, um bis zur etwas mehr als zwei Lichtsekunden entfernten Oberfläche zu gelangen, rund 20 Millionen Jahre! Dabei verliert es auch Energie, so dass es an der Oberfläche in Form von Quanten im optischen Bereich ankommt.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

2. Dynamische Zeitskala eines Sterns **8 Pkt.**

Die Entwicklung eines Sterns wird durch Prozesse mit verschiedenen charakteristischen Zeitskalen bestimmt. Die *nukleare Zeitskala* erhält man als Quotient aus dem nuklearen Energievorrat eines Sterns und seiner während der Phase seiner nuklearen Energieproduktion abgestrahlten mittleren Leistung (Sonne: 10^{10} Jahre). Die *thermische Zeitskala* ist die Zeit, in welcher der Stern seine thermische Energie ohne Energieproduktion abstrahlen würde und entspricht der Zeit, welche die Strahlung von ihrer Entstehung nahe am Sternmittelpunkt bis zur Oberfläche benötigt (Sonne: 2×10^7 Jahre). Die *dynamische Zeitskala* τ_{ff} beschreibt, in welcher Zeit ein Stern unter seiner Gravitation kollabieren würde, wenn sein stabilisierender innerer Druck wegfiele. Diese Zeit wollen wir hier berechnen.

(a) Betrachten Sie ein Massenelement am Rand des Sterns und stellen Sie dessen Bewegungsgleichung unter der Annahme verschwindenden inneren Drucks auf. Wie groß ist die in der Bewegungsgleichung auftretende Zentralmasse? (2 Pkt.)

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Berechnung von $t(r)$, d.h., der Fallzeit bis zum Radius r [wobei $r(t=0) = R$ (Anfangsradius des Sterns), $\dot{r}(t=0) = 0$]. Wie (4 Pkt.)

lange dauert es, bis der Stern vollständig kollabiert ist? *Hinweis:* Es ist nützlich (aber nicht absolut notwendig), die Formel durch Reskalieren von Längen und Zeiten dimensionslos zu machen. Folgendes Integral sollte in Ihrer Rechnung auftreten:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = -\sqrt{x(1-x)} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad 0 < x < 1$$

(c) Werten Sie die Freifallzeit $\tau_{\rm ff}$ zahlenmäßig aus für (2 Pkt.)

- die Sonne
- eine kugelförmige Gaswolke von 100 Sonnenmassen mit 4 pc Durchmesser
- eine kugelförmige Galaxie von 3×10^{10} Sonnenmassen mit 30 kpc Durchmesser

Zahlenwerte: Sonnenmasse $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^8$ m, Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/(kg s^2).

Lösung:

(a) Ein Punkt am Rande des Sterns sieht die ganze Zentralmasse M. Wir nehmen ja an, dass der Druck im Innern des Sterns „abgeschaltet“ ist, das bedeutet, dass alle Massenelemente nach innen fallen und ein ursprünglich am Rand befindliches Element bleibt am Rand. Wenn mit $r(t)$ die Position des Volumenelements zum Zeitpunkt t bezeichnet wird, lautet die Bewegungsgleichung wegen der rein radialen Bewegung (die $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r$ zur Folge hat, die Ableitungen von ϑ und φ verschwinden):

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$$

mit den Anfangsbedingungen $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = 0$. Hierbei wurde verwendet dass bei rein radialer Bewegung die (ersten und zweiten) Zeitableitungen von $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ verschwinden, also gilt: $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r$.

(b) Statt direkt die Bewegungsgleichung zu lösen, nutzen wir die Energieerhaltung. (Damit haben wir eine Integration der Bewegungsgleichungen schon durchgeführt.) Der Energieerhaltungssatz lautet hier:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{R} \tag{2.1}$$

Im Hinweis wurde empfohlen, die Gleichung durch Reskalieren von Längen und Zeiten dimensionslos zu machen. Dazu müssen wir eine für das Problem typische Längenskala und eine typische Zeitskala finden. Die Längenskala liegt auf der Hand, wir skalieren Längen mit dem ursprünglichen Sternendurchmesser R. Die Zeitskala ist nicht ganz so offensichtlich. Wir überlegen uns, von welchen Größen unser Problem abhängt. Das sind der Radius R, die Sternenmasse M und die Gravitionskonstante G. Daraus soll eine Zeitskala entstehen. Die einzige Möglichkeit, diese drei Parameter zu einer Zeit τ zu kombinieren ist:

$$\tau = \sqrt{\frac{R^3}{MG}}.$$

Da unsere gesuchte Größe ebenfalls eine Zeit ist, kann sie sich nur um einen dimensionslosen Faktor von dieser Größe unterscheiden. Wir führen nun die dimensionslosen Größen ein:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\tilde{t}\,, \qquad r = xR\,,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\,.$$

Den Faktor $\sqrt{2}$ haben wir hinzugefügt, damit $\frac{1}{2}$ aus der Gleichung verschwindet.

Alternativ kann man erst einmal eine unbekannte Zeitskala einführen und dann sehen, welche Wahl die Bewegungsgleichung einfach macht: $r = Rx$, $t = \tilde{\tau}\tilde{\tilde{t}}$, und ein Punkt sei eine Ableitung nach $\tilde{\tilde{t}}$:

$$\frac{R^2}{\tilde{\tau}^2}\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{GM}{Rx} = -\frac{GM}{R}$$
$$\dot{x}^2 = \frac{2GM\tilde{\tau}^2}{R^3}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

Die Bewegungsgleichung wird besonders einfach, wenn wir $\tilde{\tau}$ so wählen, dass der Vorfaktor auf der rechten Seite eins wird, also $\tilde{\tau} = \tau/\sqrt{2}$, und dann wird $\tilde{\tilde{t}} = \tilde{t}$.

Setzen wir dies nun in unsere Differentialgleichung (2.1) ein und kürzen dann alles raus, was möglich ist, bleibt am Ende übrig:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{x} - 1$$

wir stellen nach $\dot{x}$ um:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Da $r(t)$ mit der Zeit kleiner wird, müssen wir das negative Vorzeichen wählen. Durch Trennung der Variablen finden wir:

$$\int_0^{\tilde{t}} \mathrm{d}\hat{t} = -\int_1^x \mathrm{d}\hat{x}\sqrt{\frac{\hat{x}}{1-\hat{x}}}$$

Die Lösung dieses Integrals ist im Hinweis gegeben, wir finden:

$$\tilde{t}(x) = \sqrt{x(1-x)} + \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Für $x \to 0$ finden wir die gesuchte dynamische Zeitskala:

$$\tilde{\tau}_{\mathrm{ff}} = \tilde{t}(0) = \frac{\pi}{2},$$

Wenn wir dieses wieder in dimensionbehaftete Größen umrechnen finden wir:

$$\boxed{\tau_{\mathrm{ff}} = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\tilde{\tau}_{\mathrm{ff}} = \sqrt{\frac{\pi^2R^3}{8MG}} \approx 1.11\sqrt{\frac{R^3}{MG}}}$$

Bemerkung: In der Aufgabe war explizit gefordert, die Differentialgleichung zu lösen. Es sei aber noch erwähnt, dass man die Zeitskala auch ohne eine einzige Integration bestimmen kann. Aus dem 3. keplerschen Gesetz folgt, dass die Umlaufszeit einer Punktmasse im newtonschen Gravitionspotential für Ellipsen, deren große Halbachse gleich ist, dieselbe ist. Den Sturz eines Massenpunktes ins Gravitationszentrum kann man als Bewegung auf einer Umlaufbahn auffassen, deren kleine Halbachse verschwindet und deren große Halbachse $R/2$ ist. (Die Bahn geht von Radialkoordinate R bis Radialkoordinate 0, da der Brennpunkt bei $r = 0$ liegt. Sie reicht also nicht „auf der anderen Seite" wieder bis R.) Die Zeit bis zum Erreichen des Gravitionszentrums ist gerade die Hälfte der Periodendauer T. Diese Periode ist die gleiche wie die eines Objektes auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R/2$. Durch Gleichsetzen von Gravitionskraft mit der Zentripetalkraft findet man diese leicht heraus und kommt natürlich zum selben Ergebnis.

(c) Wir finden folgende Werte:

- Sonne:

$$\begin{aligned}\tau_{\rm ff} &= 1.11 \times \sqrt{\frac{6.96^3 \times 10^{24}\mathrm{m}^3}{6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2 \times 1.99 \times 10^{30}\mathrm{kg}}} \\ &= 1.11 \times \sqrt{\frac{6.96^3}{6.67 \times 1.99} \times 10^5}\ \mathrm{s} = 1.11 \times 1594\,\mathrm{s} = 1.77 \times 10^3\ \mathrm{s}\,,\end{aligned}$$

  also etwa 30 Minuten.

- Kugelförmige Gaswolke mit Radius von 2 pc:
  $R = 2 \times 3.09 \times 10^{16}\mathrm{m} = 6.18 \times 10^{16}\mathrm{m}$, $M = 100 M_\odot = 2 \times 10^{32}\mathrm{kg}$

$$\begin{aligned}\tau_{\rm ff} &= 1.11 \times \sqrt{\frac{6.18^3 \times 10^{48}}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{32}}}\ \mathrm{s} = 1.11 \times \sqrt{\frac{6.18^3}{6.67 \times 20}}\ \times 10^{14}\,\mathrm{s} \\ &= 1.48 \times 10^{14}\,\mathrm{s} \approx 4.69 \times 10^6\ \mathrm{a}\,,\end{aligned}$$

  also ca. 5 Millionen Jahre. Das ist ungefähr die Zeit, die die primordiale Gaswolke, aus der ein Sonnensystem der Größe des Solarsystems entsteht, braucht, um sich soweit zusammenzuziehen, dass ein Stern in ihrem Innern beginnt zu brennen. Die Annahme verschwindenden Drucks ist dabei akzeptabel, aber die Wolke ist in der Regel nicht kugelförmig und vor allem wird sie rotieren, was das Zusammenziehen verlangsamt.

- Kugelförmige Galaxie:
  $R = 1.5 \times 10^4\mathrm{pc} = 4.64 \times 10^{20}\mathrm{m}$, $M = 3 \times 10^{10} M_\odot = 6 \times 10^{40}\mathrm{kg}$

$$\begin{aligned}\tau_{\rm ff} &= 1.11 \times \sqrt{\frac{4.64^3 \times 10^{60}}{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{40}}}\ \mathrm{s} = 1.11 \times \sqrt{\frac{4.64^3}{6.67 \times 60}}\ \times 10^{16}\,\mathrm{s} \\ &= 0.55 \times 10^{16}\,\mathrm{s} \approx 1.76 \times 10^8\ \mathrm{a}\,.\end{aligned}$$

  Das ist weniger als ein Faktor 100 länger als die kleine Gaswolke braucht. Aber in diesem Fall genügt eine viel schwächere Rotation, um das Zusammenziehen vollständig aufzuhalten.

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.