

Teil A

5. Dipol-Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung

6 Pkt.

Die kosmische Hintergrundstrahlung (KMH – kosmischer Mikrowellenhintergrund) ist sehr homogen. Die größten Abweichungen von der Homogenität ($\approx 0.1\%$) sind richtungsabhängig und entstehen durch die Bewegung der Erde relativ zur Hintergrundstrahlung. Weitere Abweichungen ($\approx 10^{-3}\%$) entstanden durch Dichteschwankungen und damit verbundene Schwankungen der Raumkrümmung zum Zeitpunkt, als Photonen und Materie entkoppelten.

- (a) Ein relativ zum Schwerpunkt des KMH ruhender Beobachter O sieht ein Schwarzkörper-Spektrum mit isotroper Temperaturverteilung. Die spektrale Energiedichte des Schwarzkörper-Spektrums bei der Temperatur T wird mit der Planck-Verteilung beschrieben (4 Pkt.)

$$U = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (5.1)$$

Zeigen Sie, dass ein Beobachter O' , der sich relativ zur kosmischen Hintergrundstrahlung mit einer Geschwindigkeit v bewegt und Beobachtungen in einer durch einen Winkel ϑ' zu seiner Bewegungsrichtung gegebenen Richtung durchführt,¹ in seinem System ein Schwarzkörper-Spektrum mit der Temperatur T' wahrnimmt, die zur Temperatur T im Ruhesystem den folgenden Zusammenhang erfüllt

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta')} \quad \left[\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c} \right]. \quad (5.2)$$

Hinweis: Es ist nützlich, sich vorzustellen, dass die Strahlung senkrecht auf einen Detektor mit gegebener Fläche einfällt, und dann zu berechnen, wie groß eine Fläche senkrecht zur Bewegungsrichtung des Beobachters sein muss, auf die dieselben Photonen (nun schräg) fallen. Diese senkrechte Fläche ist im Bezugssystem des Beobachters und dem der Strahlung² gleich groß, weil für sie die Längenkontraktion keine Rolle spielt. Dann ist es sinnvoll, sich zu überlegen, wieviele aus einem Raumwinkelement kommende Photonen der Detektor pro Zeitintervall dt' empfängt. Dieselbe Photonenzahl muss ein relativ zur Strahlung ruhender Beobachter sehen, aber er drückt sie mithilfe der spektralen Photonendichte in seinem Bezugssystem aus. Gleichsetzung und Verwendung von aus den Lorentztransformationen (und/oder der Aberrationsformel) folgenden Beziehungen liefert eine Beziehung zwischen den Photonendichten in den beiden Bezugssystemen, die sich mithilfe der Planck-Verteilung in eine für die beobachteten Temperaturen umrechnen lässt. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Photonendichte von der Energiedichte unterscheidet (die einen zusätzlichen Faktor $h\nu$ enthält). Außerdem sei bemerkt, dass (5.1) die Energiedichte im Volumen beschreibt. Hier betrachten wir die Photonendichte für ein Raumwinkelement $d\Omega$ und müssen damit noch durch 4π dividieren.

- (b) Diese aufgrund der Relativbewegung (der Erde) zum Ruhesystem des kosmischen Mikrowellenhintergrunds auftretende Winkelabhängigkeit entspricht bis zur ersten (2 Pkt.)

¹Wegen der Aberration bedeutet dies, dass die Strahlung aus der Sicht der Quelle unter einem Winkel ϑ ausgesandt wurde, wobei $\cos \vartheta' = (\cos \vartheta + v/c)/(1 + (v/c) \cos \vartheta)$.

²Also dem Bezugssystem eines Beobachters, für den die Strahlung isotrop ist.

Ordnung in β der Dipol-Anisotropie

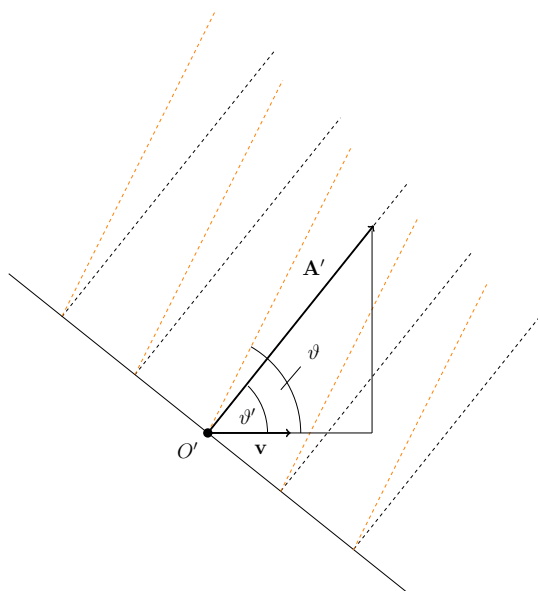
$$T(\vartheta') = T_0(1 + \beta \cos \vartheta'). \tag{5.3}$$

Die Dipol-Anisotropie wird mit maximal $\Delta T/T = T'_{max} - T/T = 1.2 \cdot 10^{-3}$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Ruhssystem des kosmischen Mikrowellenhintergrunds.

Lösung:

- (a) Wir betrachten zwei Beobachter O und O' . Beobachter O sieht isotrope Schwarzkörperstrahlung und befindet sich relativ zur Strahlung „in Ruhe“ (wie wäre eine solche Ruhe festzustellen?). Beobachter O' bewegt sich relativ zu O mit Geschwindigkeit v entlang der x -Achse.

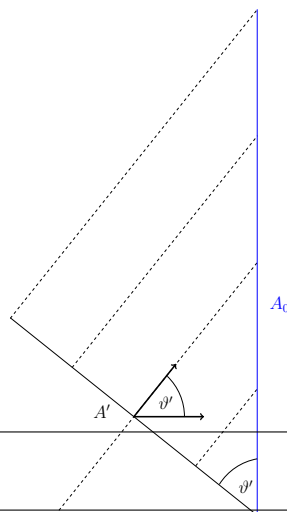
Der bewegte Beobachter führt einen Detektor mit sich. Dieser Detektor hat die Fläche A' , deren Flächennormale um den Winkel ϑ' gegen seine Bewegungsrichtung geneigt ist.



Detektorfläche mit Flächennormale A' . Sie ist entsprechend der Beobachtungsrichtung von O' um den Winkel ϑ' zur seiner Bewegungsrichtung v geneigt. Aus der Sicht von O wurde die Strahlung (orange gestrichelt) unter dem Winkel ϑ ausgesendet.

Der Detektor detektiert Strahlung aus einem Raumwinkelbereich $d\Omega'$, die senkrecht zu seiner Oberfläche einfällt. Alle Photonen, die die Fläche A' treffen, müssen eine senkrecht zur Bewegungsrichtung von O' liegende Fläche der Größe $A_0 = A' / |\cos \vartheta'|$ passieren, um zu A' zu gelangen.

Fläche A_0 , die senkrecht zur Bewegungsrichtung steht.



Diese Fläche einzuführen ist bequem, weil sie für beide Beobachter dieselbe Orientierung und Größe hat (das gilt nicht für A' , eine Fläche, die in Bewegungsrichtung der Längskontraktion unterworfen ist und deren Winkel relativ zur Bewegungsrichtung für beide Beobachter aufgrund der Lorentztransformationen verschieden ist).

Sei $n'(\nu', \vartheta')$ die spektrale Photonendichte (Zahl von Photonen pro Volumenelement, Frequenzintervall und Raumwinkelelement), die vom Beobachter O' gesehen wird. Im Zeitintervall dt' detektiert der Detektor dann dN Photonen (Zahl der Photonen, die A_0 erreichen).

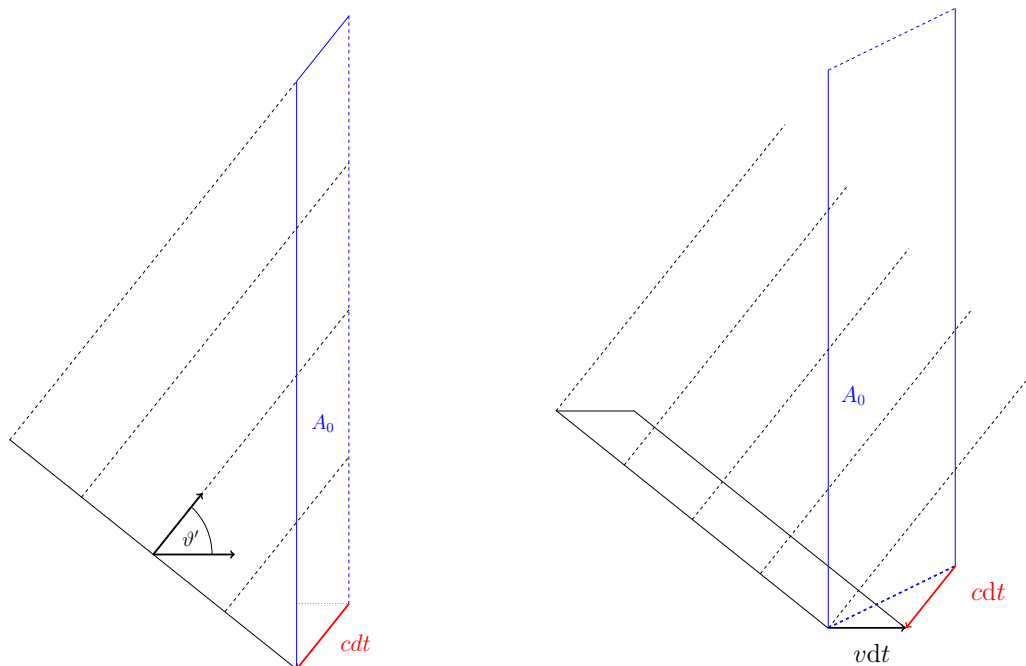
$$dN = n'(\nu', \vartheta') d\nu' d\Omega' A_0 |c \cos \vartheta'| dt' \quad (5.4)$$

Die Photonen kommen aus einem Volumen der Größe $dV = A_0 |c \cos \vartheta'| dt'$, da wegen des schrägen Einfalls ein Schiefzylinder der Höhe $|c \cos \vartheta'| dt'$ durchlaufen wird.

Im korrespondierenden Zeitintervall dt sieht Beobachter O dieselbe Zahl an Photonen auf dem Detektor von O' eintreffen, drückt diese aber in den Größen seines Bezugssystem aus. Die Fläche bewegt sich aus seiner Sicht mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung den Photonen entgegen. Das heißt hier kommen alle Photonen an, die im Volumen $dV = A_0 |v + c \cos \vartheta| dt$ liegen.

$$dN = n(\nu) d\nu d\Omega A_0 |v + c \cos \vartheta| dt \quad (5.5)$$

O' würde aufgrund seiner Bewegung auch dann Photonen einsammeln, wenn die in Ruhe wären. Da O isotrope Hintergrundstrahlung sieht, hängt $n(\nu)$ nicht noch von einem Winkel ab.



Die Transformationen zwischen den beiden Bezugssystemen lauten

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} \quad (5.6a)$$

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta} \quad (5.6b)$$

$$d\Omega' = d\varphi d\cos \vartheta' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 + \beta \cos \vartheta)^2} \quad (5.6c)$$

$$v' = v\gamma(1 + \beta \cos \vartheta). \quad (5.6d)$$

Damit lassen sich die beiden Photonendichten ineinander umrechnen. Dazu drücken wir die Größen in Σ durch die in Σ' aus.

$$\begin{aligned} dN &= n'(v', \vartheta') dv' d\Omega' A_0 c \cos \vartheta' dt' \\ &= n'(v', \vartheta') dv \gamma(1 + \beta \cos \vartheta) \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 + \beta \cos \vartheta)^2} A_0 c \frac{\cos \vartheta + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta} \frac{dt}{\gamma} \\ &= n'(v', \vartheta') dv \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 + \beta \cos \vartheta)^2} A_0 (c \cos \vartheta + v) dt \\ &= n'(v', \vartheta') dv d\Omega \frac{v^2}{v'^2} A_0 (c \cos \vartheta + v) dt \end{aligned}$$

Nun können wir dies mit (5.5) gleichsetzen und erhalten

$$n'(v', \vartheta') = n(v) \left(\frac{v'}{v} \right)^2. \quad (5.7)$$

Mit der planckschen Strahlungsformel lässt sich die Transformation der Frequenzen in eine Transformation der Temperaturen umrechnen.

$$n'(v', \vartheta') = \frac{2v'^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hv'}{kT'}} - 1} \left[\text{aus } U = \frac{8\pi hv'^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hv'}{kT'}} - 1} \right] \quad (5.8)$$

Setzen wir diesen Zusammenhang und den analogen Zusammenhang für $n(\vartheta)$ in Gleichung 5.7 ein, so erhalten wir

$$e^{\frac{hv'}{kT'}} = e^{\frac{hv}{kT}} \Rightarrow \frac{v'}{T'} = \frac{v}{T} \quad (5.9)$$

bzw. unter Verwendung von (5.6b) und (5.6d) schlussendlich die gesuchte Beziehung

$$T'(\vartheta') = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta')}. \quad (5.10)$$

Anmerkung: (5.6a) beschreibt die gut bekannte Zeitdilatation. (5.6b) ist die Gleichung für die stellare Aberration, mit der wir uns in der Aufgabe *Stellare Aberration* schon ausführlich beschäftigt haben. Hieraus gewinnt man (5.6c). Setze dazu $x' = \cos \vartheta'$, $x = \cos \vartheta$ und bilde das totale Differential

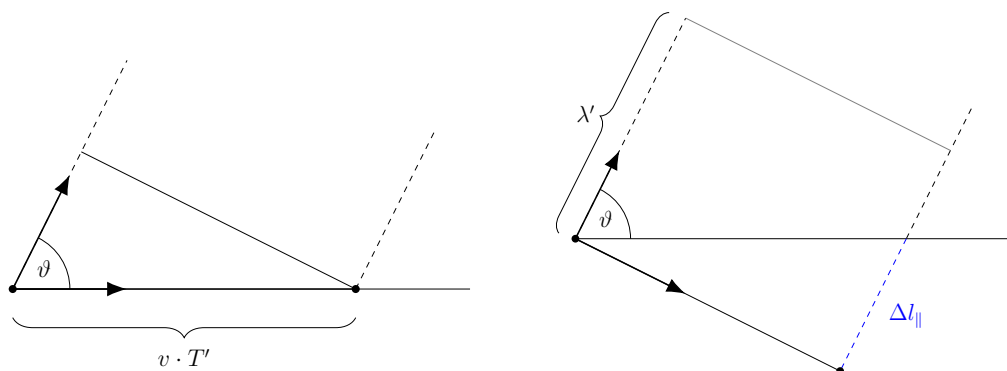
$$dx' = \left(\frac{1}{1 + \beta x} - \frac{(x + \beta)\beta}{(1 + \beta x)^2} \right) dx = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta x)^2} dx = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta x)^2} dx$$

Bleibt noch (5.6d), die wie folgt hergeleitet werden kann. Wenn O Strahlung der Wellenlänge λ beobachtet, so empfängt O' dann aufgrund der Längenkontraktion Wellenberge im Abstand von $\lambda' = \lambda/\gamma$. Er bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = v e_x$ im Winkel ϑ zur Beobachtungsrichtung e_B . In der Zeit T' zwischen zwei Wellenbergen legt er dann eine Strecke von $v \cdot e_B = v \cos \vartheta \cdot T'$ parallel zu e_B zurück. Damit verändert sich seine wahrgenommene Periodendauer:

$$\lambda' = \frac{1}{\gamma} \lambda$$

$$(c + v \cos \vartheta) T' = \frac{1}{\gamma} c T$$

$$T' = \frac{1}{\gamma (1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta)} T \Rightarrow \nu' = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) \nu = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \nu$$



Vergleich zwischen den Bewegungen im Winkel ϑ und senkrecht zur Signalrichtung. Bewegt sich der Beobachter im Winkel ϑ , so kommt er dem Signal um $\Delta l_{\parallel} = v \cos \vartheta T'$ entgegen - das Signal hat bis dahin den Weg $c T' = \lambda' - \Delta l_{\parallel}$ zurückgelegt.

- (b) Entwickeln wir Gleichung (5.10) bis zur ersten Ordnung in β . Die umständliche Methode besteht darin, erst die Ableitung

$$\frac{dT'}{d\beta} = \frac{\cos \vartheta' T}{(1 - \beta \cos \vartheta')^2} (1 - \beta^2)^{1/2} - \frac{T}{1 - \beta \cos \vartheta'} \frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}}.$$

zu berechnen und das in die übliche Formel für Taylorreihen einzusetzen. Damit ergibt sich als Näherung erster Ordnung

$$T'(\vartheta') \approx T + \left. \frac{dT'}{d\beta} \right|_{\beta=0} \beta = T (1 + \beta \cos \vartheta')$$

Einfacher ist es natürlich, die Reihenentwicklungen von

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

und

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

zu verwenden, das liefert direkt

$$T' = T (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{1}{1 - \beta \cos \vartheta'} = T (1 + \beta \cos \vartheta') + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (5.11)$$

Die maximale gemessene Anisotropie beträgt bei $T'_{max} = T'(0)$ ca. $1.2 \cdot 10^{-3}$

$$1.2 \cdot 10^{-3} = \frac{T'_{max} - T}{T} = \frac{T(1 + \beta) - T}{T} = \beta \quad (5.12)$$

und somit $v \approx 360 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Das ist die Geschwindigkeit der Erde oder der Sonne relativ zum kosmischen Mikrowellenhintergrund (je nachdem, ob die Temperaturdaten nicht hinsichtlich der Relativbewegung der Erde zur Sonne korrigiert sind oder doch). Man interessiert sich aber insbesondere für die Bewegung der Milchstraße oder der ganzen lokalen Gruppe relativ zu diesem Hintergrund. Die Hauptkorrektur, die man anbringen muss, um hierfür eine vernünftige Zahl zu bekommen, ist die Berücksichtigung der Rotation der Sonne um den Milchstraßenmittelpunkt (ca. $270 \frac{\text{km}}{\text{s}}$). Für die Bewegung der lokalen Gruppe ergibt sich $v \approx 600 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

6. Chandrasekhar-Masse

11 Pkt.

Wenn ein Stern seinen nuklearen Brennstoff erschöpft hat, bleibt ihm als einzige Möglichkeit, den durch die Gravitation erzeugten Druck auszugleichen, der Widerstand, den ein Fermigas aufgrund des paulischen Ausschließungsprinzips seiner Kompression entgegengesetzt. Ein entartetes Fermigas hat selbst bei verschwindender Temperatur noch einen endlichen Druck.

Wie Chandrasekhar zeigte, reicht dieser Gegendruck nicht aus, den Stern zu stabilisieren, wenn seine Masse einen gewissen Grenzwert überschreitet. Unterhalb dieser Grenzmasse ist das Endstadium des Lebens eines Sterns die Existenz als Weißer Zwerg, dessen mechanisches Gleichgewicht durch die Entartung des Elektronengases aufrecht erhalten wird. Liegt die Masse des Sterns oberhalb der Grenzmasse, so kann durch Rekombination von Elektronen und Protonen zu Neutronen aus dem Weißen Zwerg ein Neutronenstern mit mehr als milliardenfach höherer Dichte entstehen, stabilisiert durch den Entartungsdruck der Neutronen. Ist jedoch die Masse zu hoch, so reicht auch dieser Druck nicht zur Stabilisierung des Sterns und es entsteht ein schwarzes Loch.

Wir wollen in dieser Aufgabe einige der Überlegungen nachvollziehen, die die Existenz einer Grenzmasse zeigen und diese auch abschätzen.

- (a) Begründen Sie, dass für mechanisches Gleichgewicht einer kugelsymmetrischen Massenverteilung unter ihrer Eigengravitation gelten muss (2 Pkt.)

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (6.1)$$

wo $p(r)$ der Druck im Abstand r vom Zentrum, $m(r)$ die in der Kugel vom Radius r eingeschlossenen Teilmasse und $\rho(r)$ die lokale Dichte beim Abstand r ist. G ist die Gravitationskonstante.

Hinweis: Betrachten Sie die Kräfte auf ein Volumenelement $dA dr$ zwischen den Orten r und $r + dr$.

- (b) Zeigen Sie dann (1 Pkt.)

$$\frac{dp}{dm} = -G \frac{m(r)}{4\pi r^4}. \quad (6.2)$$

Hinweis: Was ist dm/dr für eine Kugelschale?

- (c) Zeigen Sie, dass der Ausdruck (3 Pkt.)

$$\tilde{p} = p + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \quad (6.3)$$

eine (streng) monoton fallende Funktion von r ist. Benützen Sie das, um zu zeigen, dass für den Druck p_Z im Zentrum des Sterns gelten muss

$$p_Z > \frac{GM^2}{8\pi R^4}, \quad (6.4)$$

wobei M und R Gesamtmasse und -radius des Sterns sind.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $\lim_{r \rightarrow 0} m(r)/r^2 = 0$.

- (d) Der Entartungsdruck eines nichtrelativistischen Elektronengases ist (3 Pkt.)

$$p_E = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n^{5/3}, \quad (6.5)$$

wobei $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg die Elektronenmasse und n die lokale Anzahldichte der Elektronen ist. [Eine grobe Näherung wäre $n = \rho / (m_e + m_p)$ mit m_p der (bekannten) Protonenmasse.] $h = 6.62 \times 10^{-34}$ Js ist das plancksche Wirkungsquantum.

Ersetzen Sie n durch die mittlere Anzahldichte des Sterns und berechnen Sie den Radius, den der Stern nicht überschreiten darf, damit der Entartungsdruck (6.5) dem Gravitationsdruck (6.4) die Waage halten kann. Nehmen Sie zwecks Erhalt eines Zahlenwerts $M = M_\odot$ an.

- (e) Es zeigt sich, dass die benötigten Dichten so groß werden, dass die Elektronen aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation relativistische Geschwindigkeiten erreichen. Dann gilt aber nicht mehr die Zustandsgleichung (6.5) sondern stattdessen die relativistische Gleichung (2 Pkt.)

$$p_E = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3}. \quad (6.6)$$

(Warum tritt hierin wohl die Elektronenmasse nicht mehr auf?)

Wieso kann der Stern nun den Gravitationsdruck (6.4) nicht mehr durch Verkleinerung seines Radius ausgleichen? Wie groß ist die Masse, oberhalb derer p den Wert p_Z nicht mehr erreichen kann? Wie viele Sonnenmassen M_\odot sind das? Unser Ergebnis ist natürlich nur eine Näherung. Wie könnte man es im Prinzip verbessern?

Lösung:

- (a) Betrachte ein Volumenelement, das sich vom Radius
- r
- zur Radius
- $r + dr$
- erstreckt im Kräftegleichgewicht.
- $dV = dA dr$
- ,
- $dm = \rho dV$
- .

Wirkende Kräfte:

1. Gravitationskraft: nur die Masse $m(r)$ innerhalb der Kugel mit Radius r trägt bei

$$F_g = -G \frac{m(r) \rho(r) dA dr}{r^2}$$

2. Druckkraft von innen: $F_p = p(r) dA$

3. Druckkraft von außen: $F'_p = -p(r + dr) dA = -(p(r) + dp) dA$

Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} F_g + F_p + F'_p &= 0 \\ -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} dr + \cancel{p(r)} - \cancel{p(r)} - dp &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dp}{dr} &= -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(b) Nun betrachte man die gesamte Kugelschale zwischen r und $r + dr$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad dm &= 4\pi r^2 \rho dr \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ \frac{dp}{dm} &= \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dm} = \frac{\frac{dp}{dr}}{\frac{dm}{dr}} = -G \frac{m(r)}{4\pi r^4} \end{aligned} \quad (6.7)$$

(c) *Vorbemerkung:* Das Zielergebnis dieser Teilaufgabe, nämlich, dass der Druck p_Z im Zentrum des Sterns erfüllt $p_Z > GM^2/(8\pi R^4)$, lässt sich sehr viel leichter erhalten als mit der in der Aufgabenstellung vorgeschlagenen Methode. Allerdings ermöglicht die vorgeschlagene Methode, wie wir später sehen werden, eine Verbesserung der Abschätzung, die der hier angegebene kurze Weg nicht liefert. Aus Gleichung (6.7) schließen wir, dass gilt

$$\frac{dp}{dm} \leq -G \frac{m(r)}{4\pi R^4},$$

denn $r < R$ und eine Vergrößerung des Nenners verkleinert den Betrag des Bruchs, vergrößert ihn also, weil er negativ ist. Integration über m von der Gesamtmasse M bis null liefert

$$\begin{aligned} p_Z = p(0) &= p(0) - p(M) = \int_M^0 \frac{dp}{dm} dm \\ &= - \int_0^M \frac{dp}{dm} dm > \int_0^M \frac{Gm}{4\pi R^4} dm = \frac{Gm^2}{8\pi R^4} \Big|_0^M = \frac{GM^2}{8\pi R^4}. \end{aligned} \quad (+)$$

Lösen wir die Teilaufgabe noch mit dem vorgeschlagenen Trick (den wir unserem Repertoire hinzufügen sollten)

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \\ \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{p}}{dr} &= \frac{dp}{dr} + \frac{Gm(r)}{4\pi r^4} \frac{dm}{dr} - \frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5} = \underbrace{\left[\frac{dp}{dm} + \frac{Gm(r)}{4\pi r^4} \right]}_{(6.7):=0} \frac{dm}{dr} - \frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5} \\ \frac{d\tilde{p}}{dr} &= -\frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5} < 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

womit gezeigt ist, dass \tilde{p} eine monoton fallende Funktion von r ist.

Nun betrachten wir \tilde{p} bei $r = 0$ und bei $r = R$. Es gilt

$$\tilde{p}(0) = p(0) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} = p_Z + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}$$

und zur Abschätzung des Grenzwertes können wir die Regel von de l'Hospital anwenden, um zu zeigen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m'(r)}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4\pi r^2 \rho(r)}{2r} = 2\pi \rho(0) \lim_{r \rightarrow 0} r = 0.$$

Alternativ:

$$m(r) \sim \rho(0) \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (r \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(0) \frac{4\pi}{3} r = 0.$$

(Das korrekte asymptotische Verhalten für kleine r ungleich Null liefert nur die zweite Methode.)

Damit erhalten wir, dass im Zentrum des Sterns \tilde{p} und p übereinstimmen:

$$\tilde{p}(0) = p_Z.$$

Bei $r = R$ gilt offenbar $p(r) = 0$, denn an der Oberfläche des Sterns grenzt der an das Vakuum (in guter Näherung) und dessen Druck ist Null. Damit wird

$$\tilde{p}(R) = 0 + \frac{Gm^2(R)}{8\pi R^4} = \frac{GM^2}{8\pi R^4}.$$

Wegen (6.8) (die Funktion \tilde{p} fällt mit R) muss dann gelten

$$p_Z = \tilde{p}(0) > \tilde{p}(R) = \frac{GM^2}{8\pi R^4}, \quad \text{q.e.d.} \quad (6.9)$$

Anmerkung: Ausgehend von der Definition von $\tilde{p}(r)$ lässt sich diese Abschätzung leicht verbessern. Wir setzen einfach

$$\tilde{p}(0) - \tilde{p}(R) = \int_R^0 \frac{d\tilde{p}}{dr} dr = - \int_0^R \frac{d\tilde{p}}{dr} dr \stackrel{(6.8)}{=} \int_0^R \frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5} dr$$

und schätzen $m(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r') r'^2 dr'$ nach unten ab. Wir gehen davon aus, dass die Massendichte $\rho(r)$ eine monoton fallende Funktion des Radius ist. Das muss dann auch für die mittlere Dichte

$$\bar{\rho}(r) \equiv \frac{m(r)}{4\pi r^3/3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

des Volumens bis zum Radius r gelten. Man sehe:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dr} = \frac{3\rho(r)}{r} - 3 \frac{3}{r^4} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr = 3 \frac{\rho(r) - \bar{\rho}(r)}{r} < 0,$$

denn die Dichte am Radius r muss kleiner sein als die mittlere Dichte bis zum Radius r , wenn die Dichte selbst als Funktion des Radius monoton fällt. Sei $\bar{\rho} = \bar{\rho}(R)$ die mittlere Dichte des gesamten Sterns, dann gilt

$$m(r) \geq \frac{4\pi r^3}{3} \bar{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2(r)}{r^5} \geq \bar{\rho}^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 r$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 p_Z - \frac{GM^2}{8\pi R^4} &= \tilde{p}(0) - \tilde{p}(R) \geq \bar{\rho}^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{G}{2\pi} \int_0^R r \, dr = \frac{8\pi}{9} G \bar{\rho}^2 \frac{R^2}{2} \\
 &= \frac{4\pi G R^2}{9} \left(\frac{M}{4\pi R^3/3}\right)^2 = \frac{GM^2}{4\pi R^4}, \\
 p_Z - \frac{GM^2}{8\pi R^4} &\geq \frac{GM^2}{4\pi R^4}, \\
 p_Z &\geq \frac{3GM^2}{8\pi R^4}. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Die neue untere Schranke für den Gravitationsdruck im Zentrum ist also dreimal so groß wie die nach der ersten Abschätzung.

- (d) In der Formel(6.5) für den nichtrelativistischen Entartungsdruck eines Elektronengases sollte die Teilchendichte n der Elektronen durch

$$n = \frac{\rho}{m_e + m_p} \tag{6.11}$$

abgeschätzt werden. Dies würde einer chemischen Zusammensetzung des Sterns nur aus Protonen und Elektronen entsprechen. Etwas realistischer wäre wohl die Annahme, dass etwa die Hälfte der Nukleonen Neutronen sind (denn die Hauptmasse eines weißen Zwergs besteht aus Atomkernen des Vorgängersterns, also z.B. Heliumkernen, wenn kein Heliumbrennen eintrat, Kohlenstoff- und Stickstoffkernen, wenn kein Neonbrennen eintrat) dann wäre $n = \rho / (m_e + m_p + m_n) \approx \rho / 2m_p$ eine vernünftige Abschätzung, also etwa die Hälfte der sich aus (6.11) ergebenden Elektronendichte. Wir setzen

$$n \approx \frac{\rho}{m_p} \approx \frac{\bar{\rho}}{m_p} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_p}.$$

Durch die erste Abschätzung wird n sicher überschätzt, durch die zweite in einem großen Teil des Sterns unterschätzt, da natürlich $\bar{\rho} < \rho(r)$ und im Zentrum um einen Faktor der Größenordnung 100 kleiner ist. Der Entartungsdruck p_E aus (6.5) nimmt mit diesen Abschätzungen die Form

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{5/3} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5} \tag{6.12}$$

an. Der Entartungsdruck muss dem Gravitationsdruck des Sterns das Gleichgewicht halten, was im Zentrum des Sterns zu der Beziehung

$$\begin{aligned}
 p_E = p_Z = \tilde{p}(0) &\stackrel{(6.12): p_E \approx p}{\implies} p \approx p_Z > \tilde{p}(R) \\
 &= \alpha \tilde{p}(R) = \alpha \frac{GM^2}{8\pi R^4}
 \end{aligned}$$

führt. α ist ein Faktor, von dem wir annehmen, dass er von der Größenordnung eins ist. Wäre die linke Seite der exakte Entartungsdruck, wüssten wir, dass α

mindestens drei (siehe (6.10)) sein muss. Aber p ist ja auch nur eine Näherung (für p_E). Wir erhalten

$$\frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{3}{4\pi} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5} = \alpha \frac{GM^2}{8\pi R^4},$$

wo die linke Seite mit $1/R^5$ variiert, die rechte mit $1/R^4$. Nach Multiplikation mit R^4 bleibt als einzige R -Abhängigkeit ein $1/R$ links, d.h. wir können leicht nach R auflösen:

$$R = \frac{1}{\alpha} \frac{3}{10} \left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \frac{1}{m_p^{5/3}} \frac{1}{GM^{1/3}}.$$

Der numerische Vorfaktor ist $\frac{3}{10} \left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3} = 0.112$, was mit $M = M_\odot$ zu folgenden Zahlenwerten führt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\alpha} \times 0.112 \times \frac{(6.62 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s})^2}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \\ &\quad \times \frac{1}{(1.66 \times 10^{-27})^{5/3} (2 \times 10^{30})^{1/3} \text{ kg}^2} \frac{1}{6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \times \frac{0.112 \times 6.62^2}{9.11 \times 1.66^{5/3} \times 2^{1/3} \times 6.67} \frac{10^{-68}}{10^{-31} \times 10^{-45} \times 10^{10} \times 10^{-11}} \text{ m} \\ &= \frac{1}{\alpha} 2.75 \times 10^4 \text{ km}. \end{aligned}$$

Mit $\alpha = 1$ ist dieser Radius etwas groß für einen weißen Zwerg, von denen die meisten weniger als den zweifachen Erdradius haben. Mit $\alpha = 3$ wird das Ergebnis eine recht gute Näherung, denn weiße Zwerge mit einem Radius von 9000 km, also nicht ganz dem anderthalbfachen Erdradius sind bei etwa 60% der Sonnenmasse zu erwarten. Bei Sonnenmasse sollte der Radius etwa einem Erdradius (≈ 6370 km) entsprechen. Das würde man bei $\alpha = 4.3$ erhalten.

- (e) Dass die relativistische Formel für den Entartungsdruck die Elektronenmasse nicht mehr enthält, liegt daran, dass für relativistische Elektronen der Beitrag der Masse zur Gesamtenergie vernachlässigbar ist. (Sie wird durch die kinetische Energie dominiert.)

Ersetzt man in der relativistischen Formel (6.6) für den Entartungsdruck die Anzahldichte der Elektronen durch die mittlere Massendichte, dividiert durch eine Protonenmasse, so findet man

$$p = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3} \frac{1}{R^4}$$

Folgern wir wie gehabt

$$p_E = pz \quad \Rightarrow \quad p = \alpha \tilde{p}(R),$$

so erhalten wir diesmal die interessante Beziehung

$$\frac{1}{16} \left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{1/3} \frac{3}{4\pi} hc \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3} \frac{1}{R^4} = \alpha \frac{GM^2}{8\pi R^4},$$

das heißt, in der Gleichgewichtsbedingung tritt der Radius gar nicht mehr auf! Die einzige physikalische Variable des Problems ist noch die Masse. Die Gleichgewichtsbedingung ist also nur mit einer bestimmten Masse erreichbar, sie ist nicht durch Variation des Radius erfüllbar. Mit wachsender Masse steigt die rechte Seite der Gleichung schneller als die linke \Rightarrow oberhalb einer Grenzmasse ist kein Gleichgewicht mehr möglich. Nach der Formel sieht es so aus, als wäre auch unterhalb der Grenzmasse kein Gleichgewicht möglich; doch unterhalb dieser Masse ist ein Teil des Elektronengases noch nichtrelativistisch; die verbleibende R -Abhängigkeit ermöglicht einen Gleichgewichtszustand.

Nach der Masse kann aufgelöst werden:

$$M^{2/3} = \frac{1}{\alpha} \frac{3}{8} \left(\frac{9}{4\pi^2} \right)^{1/3} \frac{hc}{G} \frac{1}{m_p}^{4/3}$$

$$M = \left(\frac{3}{8\alpha} \right)^{3/2} \frac{3}{2\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2}.$$

Der Ausdruck $\left(\frac{hc}{G} \right)^{1/2}$ ist bis auf einen Zahlenfaktor der Größenordnung eins identisch mit der sogenannten Planck-Masse.

Zahlenwerte:

$$M = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{3/2} \times 0.1096 \times \left(\frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)} \right)^{3/2}$$

$$\times \frac{1}{(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})^2}$$

$$= \alpha^{-3/2} \times 6.465 \times 10^{30} \text{ kg} = 3.23 \alpha^{-3/2} M_{\odot}$$

Mit $\alpha = 1$ wäre diese Masse ein bisschen zu hoch (weil wir den Gravitationsdruck zu niedrig geschätzt haben). Die wirkliche Grenzmasse liegt bei $M = 1.44 M_{\odot}$, was einem α -Wert von ca. 1.71 entspricht.

Tatsächlich haben wir zwei relativ grobe Näherungen gemacht. Einmal haben wir den Gravitationsdruck im Zentrum nur abgeschätzt, wobei Gl. (6.10) zeigt, dass (6.9) nur eine ziemlich ungenaue untere Schranke ist. Zum anderen haben wir die Dichte durch die mittlere Dichte ersetzt. Beides kann verbessert werden, indem die Differentialgleichung (6.1) für den Druck mit einer realistischen Zustandsgleichung gelöst wird, die den relativistischen und den nichtrelativistischen Grenzfall enthält.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

3. Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors

7 Pkt.

Der riemannsche Krümmungstensor ist in der Vorlesung definiert durch

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{km,l} - \Gamma^i{}_{kl,m} + \Gamma^n{}_{km}\Gamma^i{}_{nl} - \Gamma^n{}_{kl}\Gamma^i{}_{nm}.$$

Für eine Diskussion aller Symmetrien des Tensors ist es nützlich, alle seine Indizes kovariant zu machen, d.h. $R_{iklm} = g_{ij}R^j{}_{klm}$ zu betrachten. Beweisen Sie die im Folgenden aufgeführten Symmetrierelationen:

- (a) $R_{iklm} = -R_{ikml}$ (1 Pkt.)
 (b) $R_{iklm} = -R_{kilm}$ (3 Pkt.)
 (c) $R_{iklm} = R_{lmik}$ (2 Pkt.)
 (d) $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$ (1 Pkt.)

Lösung: Für die meisten der folgenden Teilaufgaben ist es nützlich, zunächst den Riemann-Tensor in eine vollständig kovariante Form zu bringen. [Teilaufgabe (a) ist auch ohne explizite kovariante Darstellung leicht zu lösen]:

$$R_{iklm} = g_{is}R^s{}_{klm} = g_{is}\Gamma^s{}_{km,l} - g_{is}\Gamma^s{}_{kl,m} + g_{is}(\Gamma^s{}_{nl}\Gamma^n{}_{km} - \Gamma^s{}_{nm}\Gamma^n{}_{kl}). \quad (3.1)$$

Ausgehend von

$$\Gamma^s{}_{km} = \frac{1}{2}g^{sr}(g_{rk,m} + g_{rm,k} - g_{km,s}) \quad (3.2)$$

definieren wir ein Christoffel-Symbol mit nur kovarianten Indizes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ikm} &= g_{is}\Gamma^s{}_{km} = \frac{1}{2}\underbrace{g_{is}g^{sr}}_{\delta_i^r}(g_{rk,m} + g_{rm,k} - g_{km,r}) = \frac{1}{2}(g_{ik,m} + g_{im,k} - g_{km,i}) \\ \Rightarrow g_{ik,m} &= \Gamma_{ikm} + \Gamma_{kim}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

und die Terme mit Ableitungen der Christoffelsymbole in (3.1) lassen sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} g_{is}\Gamma^s{}_{km,l} &= (g_{is}\Gamma^s{}_{km})_{,l} - g_{is,l}\Gamma^s{}_{km} = \Gamma_{ikm,l} - (\Gamma_{isl} + \Gamma_{sil})\Gamma^s{}_{km} \\ &= \frac{1}{2}(g_{ik,ml} + g_{im,kl} - g_{km,il}) - \Gamma_{isl}\Gamma^s{}_{km} - \Gamma_{sil}\Gamma^s{}_{km}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir erhalten für den Riemann-Tensor mit (3.4) und (3.1)

$$\begin{aligned} R_{iklm} &= \frac{1}{2}(g_{ik,ml} + g_{im,kl} - g_{km,il}) - \Gamma_{isl}\Gamma^s{}_{km} - \Gamma_{sil}\Gamma^s{}_{km} \\ &\quad - \frac{1}{2}(g_{ik,lm} + g_{il,km} - g_{kl,im}) + \Gamma_{ism}\Gamma^s{}_{kl} + \Gamma_{sim}\Gamma^s{}_{kl} \\ &\quad + \Gamma_{iml}\Gamma^m{}_{kn} - \Gamma_{imn}\Gamma^m{}_{kl} \end{aligned}$$

und nach Umbenennung von s in n :

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}(g_{im,kl} + g_{kl,im} - g_{km,il} - g_{il,km}) + g_{rn}(\Gamma^r{}_{im}\Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^r{}_{il}\Gamma^n{}_{km}) \quad (3.5)$$

Von dieser Form ausgehend lassen sich die gewünschten Relationen leicht beweisen.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad R_{iklm} + R_{ikml} &= \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{im,kl}} + \cancel{g_{kl,im}} - \cancel{g_{km,il}} - \cancel{g_{il,km}} \right) + g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n} - \cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{il,km}} + \cancel{g_{km,il}} - \cancel{g_{kl,im}} - \cancel{g_{im,kl}} \right) + g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n} - \cancel{\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n} \right) \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad R_{iklm} + R_{kilm} &= \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{im,kl}} + \cancel{g_{kl,im}} - \cancel{g_{km,il}} - \cancel{g_{il,km}} \right) + g_{rn} \left(\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n - \Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{km,il}} + \cancel{g_{il,km}} - \cancel{g_{im,kl}} - \cancel{g_{kl,im}} \right) + g_{rn} \left(\Gamma_{km}^r \Gamma_{il}^n - \Gamma_{kl}^r \Gamma_{im}^n \right) \\
 &= g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n} - \cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n} \right) + g_{nr} \left(\cancel{\Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^r} - \cancel{\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^r} \right) \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile wurde im zweiten Term n in r umbenannt und r in n . Der Vorfaktor bleibt wegen der Symmetrie des metrischen Tensors ungeändert.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad R_{iklm} - R_{lmik} &= \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{im,kl}} + \cancel{g_{kl,im}} - \cancel{g_{km,il}} - \cancel{g_{il,km}} \right) + g_{rn} \left(\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n - \cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{lk,mi}} + \cancel{g_{mi,lk}} - \cancel{g_{mk,li}} - \cancel{g_{li,mk}} \right) - g_{rn} \left(\Gamma_{lk}^r \Gamma_{mi}^n - \cancel{\Gamma_{li}^r \Gamma_{mk}^n} \right) \\
 &= \cancel{g_{rn} \Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n} - \cancel{g_{nr} \Gamma_{lk}^n \Gamma_{mi}^r} \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Hier wurde sowohl die Symmetrie des metrischen Tensors als auch die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ausgenutzt.

Anmerkung: Man kann (b) aus (a) und (c) folgern:

$$R_{iklm} \stackrel{(c)}{=} R_{lmik} \stackrel{(a)}{=} -R_{lmki} \stackrel{(c)}{=} -R_{kilm}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} &= \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{im,kl}} + \cancel{g_{kl,im}} - \cancel{g_{km,il}} - \cancel{g_{il,km}} \right) + g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{im}^r \Gamma_{kl}^n} - \cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{km}^n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{ik,lm}} + \cancel{g_{lm,ik}} - \cancel{g_{lk,im}} - \cancel{g_{im,lk}} \right) + g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{ik}^r \Gamma_{lm}^n} - \cancel{\Gamma_{im}^r \Gamma_{lk}^n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\cancel{g_{il,mk}} + \cancel{g_{mk,il}} - \cancel{g_{ml,ik}} - \cancel{g_{ik,ml}} \right) + g_{rn} \left(\cancel{\Gamma_{il}^r \Gamma_{mk}^n} - \cancel{\Gamma_{ik}^r \Gamma_{ml}^n} \right) \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Aus den Symmetrien (a) bis (c) folgt mit der hier bewiesenen Relation, dass, wenn man in R_{iklm} drei beliebige Indizes zyklisch vertauscht und die drei Terme zusammenzählt, sich null ergibt. Man kann den Index i mithilfe von (a) bis (c) an eine beliebige Stelle bringen.

4. Kovariante Ableitung und Metrik

2 Pkt.

Ableitungen nach Koordinaten werden in der allgemeinen Relativitätstheorie gern in einer

„Komma-Notation“ dargestellt:

$$A_{,l} \equiv \partial_l A = \frac{\partial}{\partial x^l} A.$$

Ableitungen von Tensoren ergeben im Allgemeinen nicht wieder Tensoren. Zwecks Erhalt eines mit einer Ableitung verknüpften Tensors verwendet man die *kovariante Ableitung*, für die sich eine „Strichpunkt-Notation“ eingebürgert hat:

$$\begin{aligned} A_{;l} &= A_{,l}, \\ A_{k;l} &= A_{k,l} - \Gamma_{kl}^m A_m, \\ A_{jk;l} &= A_{jk,l} - \Gamma_{jl}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{jm}, \\ A_{;l}^k &= A_{,l}^k + \Gamma_{ml}^k A^m, \\ A_{;l}^{jk} &= A_{,l}^{jk} + \Gamma_{ml}^j A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{jm}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Man zeige, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet:

$$g_{jk;l} = 0.$$

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen wir die Christoffel Symbole. Sie sind definiert durch

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}).$$

$$\begin{aligned} g_{jk;l} &= g_{jk,l} - \Gamma_{jl}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{jm} \\ &= g_{jk,l} - \frac{1}{2} g^{mn} (g_{nj,l} + g_{nl,j} - g_{jl,n}) g_{mk} - \frac{1}{2} g^{mn} (g_{nk,l} + g_{nl,k} - g_{kl,n}) g_{jm} \\ &= g_{jk,l} - \frac{1}{2} \delta_k^n (g_{nj,l} + g_{nl,j} - g_{jl,n}) - \frac{1}{2} \delta_j^n (g_{nk,l} + g_{nl,k} - g_{kl,n}) \\ &= g_{jk,l} - \frac{1}{2} (g_{kj,l} + \cancel{g_{kl,j}} - \cancel{g_{jl,k}}) - \frac{1}{2} (g_{jk,l} + \cancel{g_{jl,k}} - \cancel{g_{kl,j}}) \\ &= \frac{1}{2} g_{jk,l} - \frac{1}{2} g_{kj,l} = 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Im Teil B können **9 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an antonia.schulz@ovgu.de.