

Teil A

11. DeSitter-Kosmos

10 Pkt.

Eine Form des Linienelements des DeSitter-Kosmos ist gegeben durch:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/a} (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (11.1)$$

- (a) Bestimmen Sie den Krümmungsindex k , die Hubble-Funktion $H(t)$, den Dezelerationsparameter $q_0(t)$ sowie die Zustandsgleichung $p = p(\mu)$. Was folgern Sie daraus für die möglichen Werte von μ und p , solange keine dunkle Energie mit exotischen Eigenschaften angenommen wird? (3 Pkt.)
- (b) Geben Sie den Wert der kosmologischen Konstante an. (1 Pkt.)
- (c) Man kann behaupten, dass (11.1) ein statisches Universum beschreibt (neben dem einsteinschen). Überprüfen Sie die Plausibilität dieser Behauptung, indem Sie eine zeitliche Translation $t \rightarrow t' = t + t_0$ des Linienelements durchführen. Lässt sich durch eine geeignete räumliche Transformation Invarianz des Linienelements erreichen? (2 Pkt.)
- (d) Führen Sie durch (4 Pkt.)

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\alpha &= x^\alpha e^{ct/a}, & \alpha &= 1, \dots, 3 \\ e^{c\tilde{t}/a} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{r}}{a}\right)^2} &= e^{ct/a}, & \tilde{r}^2 &= \sum_{\alpha=1}^3 (\tilde{x}^\alpha)^2 \end{aligned}$$

neue Koordinaten ein und zeigen Sie explizit, dass diese ein statisches Linienelement produzieren (d.i. ein Linienelement, in dem kein metrischer Koeffizient von der Zeitkoordinate abhängt und die Metrik diagonal ist). Was passiert bei $\tilde{r} = a$?

Hinweis: Es lohnt sich, Kugelkoordinaten einzuführen, d.h. die \tilde{x}^α durch \tilde{r} , $\tilde{\vartheta}$ und $\tilde{\varphi}$ zu ersetzen.

Anmerkung: Die DeSitter-Raumzeit entspricht einem vierdimensionalen Raum konstanter Krümmung, der ein Hyperboloid \mathbb{H}^4 in einem fünfdimensionalen Raum mit Lorentzsignatur darstellt. Sie kann als Verallgemeinerung des Minkowski-Raums für eine Raumzeit mit nicht verschwindender kosmologischer Konstante angesehen werden.

Lösung:

- (a) • Krümmungsradius: Wir vergleichen mit dem allgemeinen Robertson-Walker-Linienelement:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{\frac{2ct}{a}} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

und lesen ab:

$$k = 0.$$

- Weiterhin lesen wir ab:

$$\frac{S^2(t)}{S_0^2} = e^{\frac{2ct}{a}},$$

die Konstante S_0 steckt in dem ursprünglichen $dx^2 + dy^2 + dz^2$, welches ja die Dimension einer Länge zum Quadrat hat. In der Vorlesung wurde $S(t)$

als dimensionsbehaftete Größe eingeführt, und dafür $dx^2 + dy^2 + dz^2$ entdimensionalisiert. Damit kann $S(t)$ nicht einfach die Exponentialfunktion sein, sondern muss noch einen Faktor der Dimension einer Länge enthalten, eben die Konstante S_0 .

$$S(t) = S_0 e^{ct/a}$$

- Hubble Funktion:

$$H(t) = \frac{\dot{S}}{cS} = \frac{cS/a}{cS} = \frac{1}{a} = \text{const.}$$

Damit ist auch der Hubble-Parameter (bzw. die „Hubble-Konstante“) eine echte Konstante.

- Dezelerationsparameter:

$$q_0(t) = -\frac{\ddot{S}S}{\dot{S}^2} = -\frac{c^2 S^2/a^2}{c^2 S^2/a^2} = -1$$

Wir betrachten nun die Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2 \frac{\Lambda}{3} = c^2 \kappa \frac{\mu}{3}$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \kappa \frac{\mu}{3}$$

also gilt:

$$\mu = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{a^2} - \Lambda \right) = \text{const.} \quad (11.2)$$

Aus dem Energiesatz

$$\underbrace{\dot{\mu}}_{=0} + 3 \frac{\dot{S}}{S} (\mu + p) = 0$$

folgt dann unmittelbar:

$$p = -\mu$$

Für normale Materie gilt $\mu > 0$, daraus würde folgen $p < 0$. Dies ist aber unter normalen Umständen verboten. (Im Fall der dunklen Energie hingegen gilt $p < 0$ als akzeptabel, d.h., sie produziert eine Zugspannung anstelle eines Drucks. Diese Zustandsgleichung ist eine Folge der Lorentz-Invarianz des Vakuums.)

Der DeSitter-Kosmos ist also ein leerer Kosmos mit $\mu = p = 0$.

- (b) Mit (11.2) und $\mu = 0$ folgt:

$$\Lambda = \frac{3}{a^2} > 0.$$

- (c) Wir betrachten die Zeit $t' = t + t_0$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt - e^{2ct/a} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= c^2 dt'^2 - e^{2ct'/a} e^{-2ct_0/a} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= c^2 dt'^2 - e^{2ct'/a} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = ds'^2 \end{aligned}$$

wobei $dx' = dx e^{-ct_0/a}$ usw.

Wenn wir also Längen so reskalieren, dass sich die Eigenlänge passend mit der Zeit verkürzt, scheint der Kosmos statisch. Das ist aber noch *kein* überzeugendes Argument für statische Eigenschaften, denn eine ähnliche Transformation kann man für jedes $S(t)$ in einem Robertson-Walker-Linienelement finden, wenn $k = 0$ ist. Sie entspricht im Grunde nur dem Übergang zwischen verschiedenen Sätzen mitbewegter Koordinaten. Was wir brauchen, sind neue Koordinaten, in denen das Linienelement *nicht mehr explizit von der Zeit abhängt* (inklusive g_{00}). Das wird in der nächsten Teilaufgabe behandelt.

(d) Ausgehend von:

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha e^{ct/a} \quad (11.3)$$

$$e^{c\tilde{t}/a} \sqrt{1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}} = e^{ct/a}, \quad (11.4)$$

erhalten wir:

$$d\tilde{x}^\alpha = e^{ct/a} dx^\alpha + x^\alpha \frac{c}{a} e^{ct/a} dt \quad (11.5)$$

$$\frac{c}{a} e^{ct/a} dt = \frac{c}{a} d\tilde{t} e^{\frac{c\tilde{t}}{a}} \sqrt{1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}} - e^{\frac{c\tilde{t}}{a}} \frac{\tilde{r}/a^2}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}}} d\tilde{r} \quad (11.6)$$

aus (11.6) erhalten wir

$$dt = \underbrace{d\tilde{t} e^{c(\tilde{t}-t)/a} \sqrt{1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}}}_{= 1, \text{ Gl. (11.4)}} - \tilde{r} d\tilde{r} e^{c(\tilde{t}-t)/a} \frac{1}{ac \sqrt{1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}}}.$$

Nach kurzer Umformung unter Benutzung von (11.4) ergibt das:

$$dt = d\tilde{t} - \tilde{r} d\tilde{r} \frac{1}{ac \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2}\right)}$$

Bemerkenswert ist hier, dass dies bloß eine *Resynchronisierungstransformation* darstellt, d.h., zur Zeit wird eine rein räumliche Funktion addiert. (An jedem Ort werden Uhren um einen zeitlich konstanten, nur vom Ort selbst abhängigen Betrag verstellt.)

Es ist sinnvoll, gleich zum Quadrat von dx^α überzugehen und zu summieren:

$$\begin{aligned} e^{2ct/a} \sum_{\alpha} (dx^\alpha)^2 &= \sum_{\alpha} \left(d\tilde{x}^\alpha - x^\alpha \frac{c}{a} e^{ct/a} dt \right)^2 = \sum_{\alpha} \left(d\tilde{x}^\alpha - \tilde{x}^\alpha \frac{c}{a} dt \right)^2 \\ &= \sum_{\alpha} \left[(d\tilde{x}^\alpha)^2 - 2 \frac{c}{a} \tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\alpha dt + (\tilde{x}^\alpha)^2 \frac{c^2}{a^2} dt^2 \right] \\ &= d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 - 2 \frac{c}{a} \tilde{r} d\tilde{r} dt + \frac{c^2}{a^2} \tilde{r}^2 dt^2, \end{aligned} \quad (11.7)$$

wobei wir $\sum_{\alpha} (\tilde{x}^{\alpha})^2 = \tilde{r}^2$ eingeführt haben, was $\sum_{\alpha} \tilde{x}^{\alpha} d\tilde{x}^{\alpha} = \tilde{r}d\tilde{r}$ impliziert und mit Einführung der Winkel in Kugelkoordinaten die Darstellung

$$\sum_{\alpha} (d\tilde{x}^{\alpha})^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 \quad \text{mit} \quad d\tilde{\Omega}^2 = d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2$$

liefert. In Gleichung (11.7) sollte auf der rechten Seite noch dt durch die neuen Koordinaten ersetzt werden:

$$\begin{aligned} e^{2ct/a} \sum_{\alpha} (dx^{\alpha})^2 &= d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 - 2\frac{c}{a} \tilde{r} d\tilde{r} \left(d\tilde{t} - \tilde{r} d\tilde{r} \frac{1}{ac(1-\tilde{r}^2/a^2)} \right) \\ &\quad + \frac{c^2}{a^2} \tilde{r}^2 \left(d\tilde{t} - \tilde{r} d\tilde{r} \frac{1}{ac(1-\tilde{r}^2/a^2)} \right)^2 \\ &= d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 + c^2 \frac{\tilde{r}^2}{a^2} d\tilde{t}^2 - 2\frac{c}{a} \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{a^2(1-\tilde{r}^2/a^2)} \right) \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{t} \\ &\quad + \left(2\frac{\tilde{r}^2}{a^2} \frac{1}{1-\tilde{r}^2/a^2} + \frac{\tilde{r}^4}{a^4} \frac{1}{(1-\tilde{r}^2/a^2)^2} \right) d\tilde{r}^2 \\ &= \left(1 + \frac{\tilde{r}^2/a^2}{1-\tilde{r}^2/a^2} \right)^2 d\tilde{r}^2 + c^2 \frac{\tilde{r}^2}{a^2} d\tilde{t}^2 - \frac{2c/a}{1-\tilde{r}^2/a^2} \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{t} + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 \\ &= \left(\frac{1}{1-\tilde{r}^2/a^2} \right)^2 d\tilde{r}^2 + c^2 \frac{\tilde{r}^2}{a^2} d\tilde{t}^2 - \frac{2c/a}{1-\tilde{r}^2/a^2} \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{t} + \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 \quad (11.8) \end{aligned}$$

Nun können wir das raumzeitliche Linienelement mit den neuen Koordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - e^{2ct/a} \sum_{\alpha} (dx^{\alpha})^2 \\ &= c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{2c/a}{1-\tilde{r}^2/a^2} \tilde{r} d\tilde{t} d\tilde{r} + \frac{\tilde{r}^2}{a^2(1-\tilde{r}^2/a^2)^2} d\tilde{r}^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{1-\tilde{r}^2/a^2} \right)^2 d\tilde{r}^2 - c^2 \frac{\tilde{r}^2}{a^2} d\tilde{t}^2 + \frac{2c/a}{1-\tilde{r}^2/a^2} \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{t} - \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Somit ist das Linienelement für die neuen Koordinaten gegeben durch:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{a^2} \right) c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{1}{1-\tilde{r}^2/a^2} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\tilde{\Omega}^2} \quad (11.9)$$

woraus man den metrischen Tensor ablesen kann.

Diese Metrik ist (für $\tilde{r} < a$) statisch, hängt also nicht von der Zeitkoordinate ab. Allerdings wird sie bei $\tilde{r} = a$ singularär. Dort hat das DeSitter-Universum einen Horizont. Ein Beobachter bei $\tilde{r} = 0$ kann keinerlei Information von der anderen Seite des Horizonts erhalten. Die Singularität ist nur eine Koordinatensingularität, d.h., die Raumzeit selbst wird nicht singularär.

Für $\tilde{r} > a$ ist der metrische Koeffizient $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$ negativ und $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$ positiv. Damit wird \tilde{t} eine raumartige Koordinate, \tilde{r} eine zeitartige. Da die Metrik von der zeitartigen Koordinate \tilde{r} explizit abhängt, ist sie für $\tilde{r} > a$ nicht mehr statisch.

12. Einstein-DeSitter-Universum, Abstand sichtbarer Objekte

6 Pkt.

Im Einstein-DeSitter-Universum gilt für den Expansionskalar:

$$S(t) = S(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3},$$

wobei t_0 die Jetztzeit und t eine beliebige andere positive Zeit ist. Wir fragen nun danach, welche der Objekte, die wir heute sehen können, zur Zeit der Lichtaussendung am weitesten von uns entfernt waren.

Den mit unserer Galaxis verknüpften Fundamentalbeobachter setzen wir an die Koordinate $\rho = 0$, den mit der beobachteten Galaxie, der Lichtquelle, verknüpften an die Koordinate $\rho = \rho_e$. Die räumliche Maßstabsentfernung werde mit $\ell(t_0, t_e)$, bezeichnet, sie hängt natürlich vom Aussendezeitpunkt t_e des heute erreichenden Lichts ab. Es gilt

$$\ell(t_0, t_e) = S(t_e)\rho_e = cS(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{S(t)}.$$

- (a) Berechnen Sie den Aussendezeitpunkt $t_e = t^*$ derjenigen Quellen, deren Licht zur Zeit t_0 ankommt, die zum Zeitpunkt der Aussendung den größten Abstand zum Beobachter bei $\rho = 0$ hatten. (3 Pkt.)
- (b) Welche Relativgeschwindigkeit hatte die Quelle zu diesem Zeitpunkt gegenüber unserem Standort? Geschwindigkeit sei definiert als die Vergrößerung der Maßstabsentfernung pro Einheit der Emissionszeit. (2 Pkt.)
- (c) Welche Rotverschiebung beobachten wir heute für diese Quelle(n)? (1 Pkt.)

Lösung: Berechnen wir zunächst einen expliziten Ausdruck für $\ell(t_0, t_e)$:

$$\begin{aligned} \ell(t_0, t_e) &= cS(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} = c \frac{S(t_e)}{S(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3} dt = c \frac{S(t_e)}{S(t_0)} t_0^{2/3} 3t^{1/3} \Big|_{t_e}^{t_0} \\ &= c \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{2/3} t_0^{2/3} (3t_0^{1/3} - 3t_e^{1/3}) = 3c (t_0^{1/3} t_e^{2/3} - t_e) \end{aligned} \quad (12.1)$$

- (a) Bestimme Extremum als Funktion von t_e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial t_e} &= 3c \left(\frac{2}{3} \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{1/3} - 1 \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{1/3} &= \frac{3}{2} \\ \frac{t_0}{t_e} &= \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27}{8} \\ t_e = t^* &= \frac{8}{27} t_0 \end{aligned} \quad (12.2)$$

Anstatt die explizite Formel zu differenzieren, können wir auch von der Definition ausgehen:

$$\frac{\partial \ell}{\partial t_e} = c\dot{S}(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} - cS(t_e) \frac{1}{S(t_e)} = \frac{\dot{S}(t_e)}{S(t_e)} \ell(t_0, t_e) - c = \dot{S}(t_e)\rho_e - c \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit (12.1) führt das sofort auf dieselbe Gleichung für t^* wie oben. Außerdem liest man ab, dass unabhängig vom Gesetz, nach dem sich $S(t)$ verändert, die Geschwindigkeit $v = \dot{S}(t_e)\rho_e$ der Galaxien, die die Maximierungsbedingung erfüllen, die Lichtgeschwindigkeit sein muss.

(b) Radialgeschwindigkeit:

$$v = \dot{S}(t_e)\rho_e = \frac{\dot{S}(t_e)}{S(t_e)} \ell(t_o, t_e), \quad \text{und} \quad \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\frac{2}{3}t^{-1/3}}{t^{2/3}} = \frac{2}{3t}$$

$$\leadsto v \stackrel{(12.1)}{=} \frac{2}{3t_e} 3c \left(t_o^{1/3} t_e^{2/3} - t_e \right) = 2c \left(\left(\frac{t_o}{t_e} \right)^{1/3} - 1 \right) \stackrel{(12.2)}{=} 2c \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = c$$

$v = c$

Hier gab es offenbar einen Fallstrick, in dem sich man sich verfangen konnte. In Teilaufgabe (a) wurde ja t_e so bestimmt, dass $\partial\ell/\partial t_e = 0$; man könnte meinen, dass dies die Geschwindigkeit $v = 0$ impliziert, denn die Zeitableitung von ℓ nach t_e entspricht ja der genannten Geschwindigkeitsdefinition.

Warum ist das nicht richtig? Die Ableitung, die wir in (a) berechnet haben, ist die partielle Ableitung nach t_e bei konstantem t_o . Wenn aber t_e variiert wird und die Ankunftszeit des Lichts konstant bleibt, handelt es sich um das Licht *verschiedener* Galaxien. Die Variation von t_e entspricht der Variation über diese Galaxien – das war ja auch das Ziel, wir wollten die am weitesten entfernte finden.

Zur Geschwindigkeitsberechnung müssen wir die Variation von ℓ mit der Zeit t_e für *eine* Galaxie berechnen, d.h. wir brauchen die totale Zeitableitung, was hier auf dasselbe hinausläuft wie eine Ableitung bei konstantem ρ_e . In Formeln:

$$\frac{d\ell}{dt_e} = \frac{\partial\ell}{\partial t_o} \frac{dt_o}{dt_e} + \frac{\partial\ell}{\partial t_e} = \frac{\partial\ell}{\partial t_o} \frac{dt_o}{dt_e} = c \left(\frac{t_e}{t_o} \right)^{2/3} \frac{dt_o}{dt_e}$$

$$0 = \frac{d\rho_e}{dt_e} = c \frac{d}{dt_e} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{S(t)} = \frac{c}{S(t_o)} \frac{dt_o}{dt_e} - \frac{c}{S(t_e)}$$

$$\Rightarrow \frac{dt_o}{dt_e} = \frac{S(t_o)}{S(t_e)} = \left(\frac{t_o}{t_e} \right)^{2/3} \quad \text{und folglich} \quad \frac{d\ell}{dt_e} = c$$

(c) Beobachtete Rotverschiebung:

$$1 + z = \frac{S(t_o)}{S(t_e)} = \left(\frac{t_o}{t_e} \right)^{2/3} \stackrel{(12.2)}{=} \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{5}{4}}$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B**8. Statisches Universum: der Einstein-Kosmos****6 Pkt.**

In der Vorlesung werden die Friedmann-Lemaître-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2 \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2} \mu \quad (8.1)$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2 \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (8.2)$$

abgeleitet. Hierin ist $S = S(t)$ der Expansionsskalar (dessen Zeitabhängigkeit Auskunft zur Ausdehnung oder Schrumpfung des Universums gibt), $k \in \{1, 0, -1\}$ der Krümmungsindex, Λ die kosmologische Konstante, μ die Energiedichte und p der Druck. (c ist die Lichtgeschwindigkeit.)

Der Einstein-Kosmos ist eine statische Lösung dieser Gleichungen mit $\dot{S} = 0$, $\ddot{S} = 0$.

- (a) Bestimmen Sie den (hier als Krümmungsradius interpretierbaren) Expansionsskalar S_E und die kosmologische Konstante Λ_E für diese Lösung unter der Annahme $\mu > 0$, $p = 0$. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Konstanten $C = c^2 \kappa \mu S^3 / 3$ aus, die der Energiesatz für Staubuniversen liefert. Was folgt für den Krümmungsindex k ? Ist auch ein statisches Universum für $k = 0$ denkbar? (3 Pkt.)
- (b) Zeigen Sie, dass der Einstein-Kosmos instabil ist gegenüber kleinen Störungen $S_E \rightarrow S_E + \delta S$, $\mu_E \rightarrow \mu_E + \delta\mu$, die schwarzer Strahlung entsprechen ($\delta p = \delta\mu/3$). (3 Pkt.)

Hinweis: Man setzt die um die jeweilige Störung veränderten Größen in die Friedmann-Lemaître-Gleichungen (mit festen Parametern k und Λ) ein und linearisiert in den Störungen, das erzeugt ein lineares Gleichungssystem für δS und $\delta\mu$. Zu diskutieren ist dann, ob dessen Lösungen gegen null gehen oder anwachsen.

Lösung:

- (a) Mit $\dot{S} = \ddot{S} = 0$, $S = S_E$ und $\Lambda = \Lambda_E$ sowie $\kappa = 8\pi G/c^4$ wird aus (8.1) und (8.2):

$$\frac{c^2 k}{S_E^2} - c^2 \frac{\Lambda_E}{3} = \frac{c^2 \kappa \mu}{3}$$

$$\frac{c^2 k}{S_E^2} - c^2 \Lambda_E = -c^2 \kappa p$$

woraus sofort folgt, dass die Energiedichte μ und der Druck p konstant sein müssen. Mit der Annahme $p = 0$ liefert die zweite Gleichung $k/S_E^2 = \Lambda_E$ und damit

$$S_E = \sqrt{\frac{k}{\Lambda_E}}.$$

(Wir nehmen an, dass $S_E > 0$.) Setzen wir das in die erste Gleichung ein, so folgt unmittelbar:

$$\frac{2}{3} \Lambda_E = \frac{\kappa \mu}{3} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_E = \frac{\kappa \mu}{2}$$

Wegen $\mu > 0$ muss gelten $\Lambda_E > 0$. Ferner gilt $k/S_E^2 = \Lambda_E > 0$, damit muss der Krümmungsindex k ebenfalls größer null sein und wir haben $k = 1$, also ein geschlossenes Universum.

Ein statisches Universum ist auch für $k = 0$ denkbar, allerdings müsste in diesem $\Lambda_E = \mu = 0$ gelten, es würde sich also um einen leeren Kosmos handeln. (Wenn wir $\mu < 0$ ausschließen, gibt es keine statische Lösung mit negativer Krümmung.)

Führen wir die Konstante $C = c^2 \kappa \mu S_E^3 / 3$ aus der Friedmann-Gleichung ein, so können wir μ aus den Gleichungen eliminieren und erhalten

$$\Lambda_E = \frac{\kappa}{2} \frac{3C}{c^2 \kappa S_E^3} = \frac{3C}{2c^2} \Lambda_E^{3/2},$$

was sofort auf

$$\Lambda_E = \frac{4}{9} \frac{c^4}{C^2} \quad (8.3)$$

$$S_E = \frac{3C}{2c^2} \quad (8.4)$$

führt.

- (b) Nun nehmen wir eine kleine Störung der Energiedichte in Form von Strahlung an, d.h. $\mu = \mu_E + \delta\mu$, $p = \delta p = \delta\mu/3$. Dies wird eine Änderung des Skalenfaktors auf $S = S_E + \delta S$ zur Folge haben. (Die kosmologische Konstante sei störungsunabhängig, also eine echte Konstante.)

Wir wollen die Friedmann-Lemaître-Gleichungen in linearer Näherung in diesen Störungen lösen und stellen zunächst fest

$$\dot{S} = \dot{S}_E + \frac{d}{dt} \delta S = (\delta \dot{S}) = \delta \dot{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\delta \dot{S}}{S_E}$$

$$\left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 = \mathcal{O}(\delta S^2)$$

und

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_E (1 + \delta S/S_E)} = \frac{1}{S_E} \left(1 - \frac{\delta S}{S_E} \right)$$

$$\frac{1}{S^2} = \frac{1}{S_E^2} \left(1 - 2 \frac{\delta S}{S_E} \right)$$

Das setzen wir in (8.1) und (8.2) ein:

$$\frac{c^2 k}{S_E^2} \left(1 - 2 \frac{\delta S}{S_E} \right) - \frac{c^2 \Lambda_E}{3} = \frac{c^2 \kappa}{3} (\mu_E + \delta\mu) \quad (8.5)$$

$$\frac{2\delta \ddot{S}}{S_E} + \frac{c^2 k}{S_E^2} \left(1 - 2 \frac{\delta S}{S_E} \right) - \frac{c^2 \Lambda_E}{3} = -c^2 \kappa \delta p = -\frac{c^2 \kappa}{3} \delta\mu \quad (8.6)$$

Unterstrichene Terme bilden die Gleichung nullter Ordnung und entfallen. Mit $k = 1$ wird unser lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{-2c^2}{S_E^3} \delta S &= \frac{c^2 \kappa}{3} \delta \mu \\ \frac{2\delta \ddot{S}}{S_E} - \frac{2c^2}{S_E^3} \delta S &= -\frac{c^2 \kappa}{3} \delta \mu \end{aligned}$$

Addition eliminiert den $\delta\mu$ -Term und liefert:

$$\delta \ddot{S} = \frac{2c^2}{S_E^2} \delta S \quad (8.7)$$

Aus $\delta S > 0$ folgt also $\ddot{S} > 0$, die Störung wächst; aus $\delta S < 0$ folgt $\ddot{S} < 0$, was ebenfalls ein Anwachsen der Amplitude der Störung bedeutet. Damit liegt eine Instabilität vor.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8.7) ist

$$\delta S = ae^{\sqrt{2}ct/S_E} + be^{-\sqrt{2}ct/S_E},$$

wobei der erste Term exponentiell anwächst, der zweite exponentiell gedämpft ist. Bei einer generischen Störung wird nicht zufällig der erste Term den Vorfaktor null haben, d.h., die Aussage ist wieder, dass eine Instabilität vorliegt. Nehmen wir etwa $\delta S(0) = \delta S_0$ und $\delta \dot{S}(0) = 0$ als Anfangsbedingungen, so lautet die Lösung

$$\delta S = \delta S_0 \cosh\left(\sqrt{2} \frac{ct}{S_E}\right).$$

Anmerkung: Mit der Friedmann-Gleichung

$$\dot{S}^2 = \frac{C}{S} + \frac{c^2 \Lambda}{3} S^2 - c^2 k$$

allein führt eine *lineare* Stabilitätsanalyse nicht zum Ziel, denn es entsteht in linearer Näherung überhaupt keine Bewegungsgleichung. (Es ist dabei ja auch nur $\delta p = 0$ möglich.)

9. Alter des Universums

4 Pkt.

Nehmen Sie ein flaches, materiedominiertes Universum an, dessen Expansion durch die Friedmann-Lemaître Gleichungen, einschließlich kosmologischer Konstante, beschrieben wird. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck¹ für das Produkt aus dem momentanen Hubble-Parameter H_0 und dem Alter des Universums t_0 , der nur von dem momentanen Dichteparameter $\Omega_0 = \mu(t_0)/\mu_c(t_0)$ des Universum abhängt. Hierbei ist $S(t)$ der Skalenfaktor des Universums, $\mu(t)$ die Energiedichte des Universums und $\mu_c(t)$ die zuge-

¹Mit geschlossenem Ausdruck ist hier eine explizite Gleichung ohne Integral- oder Summenzeichen gemeint.

hörige kritische Dichte:

$$\mu_c(t) = \frac{3H^2 c^2}{8\pi G},$$

und $H(t)$ der Hubble Parameter

$$H(t) = \frac{\dot{S}}{S}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0}{S^3} + (1 - \Omega_0) \right] \quad \left(\text{oder: } \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \frac{S_0^3}{S^3} + (1 - \Omega_0) \right] \right)$$

verwenden sie dabei die Konvention $S(t_0) = S_0 = 1$.

Lösung: Wir beginnen bei den Friedmann-Lemaître Gleichungen:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2 \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2} \mu \quad (9.1)$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2 \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (9.2)$$

Wir ziehen Gleichung (9.1) von (9.2) ab und erhalten die Beschleunigungsgleichung:

$$2\frac{\ddot{S}}{S} - 2c^2 \frac{\Lambda}{3} = -\frac{8\pi G}{3c^2} (\mu + 3p). \quad (9.3)$$

Nun differenzieren wir (9.1) einmal nach der Zeit und erhalten:

$$2\frac{\dot{S}}{S} \left(\frac{\ddot{S}S - \dot{S}^2}{S^2} \right) = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\mu} + 2\frac{kc^2 \dot{S}}{S^3}$$

Wir kürzen mit \dot{S}/S , dies ergibt:

$$2\frac{\ddot{S}}{S} - 2\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\mu} \frac{S}{\dot{S}} + 2\frac{kc^2}{S^2}$$

Nun ersetzen wir \dot{S}/S durch Benutzung von (9.1), ($k = 0$) damit erhalten wir

$$2\frac{\ddot{S}}{S} - 2c^2 \frac{\Lambda}{3} - \frac{16\pi G}{3c^2} \mu = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\mu} \frac{S}{\dot{S}}.$$

Zusammen mit der Beschleunigungsgleichung (9.3) ergibt das:

$$-\frac{8\pi G}{3} (\mu + 3p) - \frac{16\pi G}{3} \mu = \frac{8\pi G}{3} \dot{\mu} \frac{S}{\dot{S}}.$$

Nach Zusammenfassen und Umstellen erhalten wir die sogenannte Flüssigkeitgleichung:

$$\dot{\mu} + 3\frac{\dot{S}}{S} (\mu + p) = 0.$$

Alternativ kann man die Flüssigkeitsgleichung auch direkt aus dem Energiesatz ableiten. Für ein materiedominiertes Universum (Staubuniversum) verschwindet der Druck, die Flüssigkeitsgleichung liefert dann:

$$\begin{aligned}\dot{\mu} + 3\frac{\dot{S}}{S}\mu &= 0 \\ S\dot{\mu} + 3\dot{S}\mu &= 0 \\ \frac{1}{S^3} \frac{d}{dt} (S^3\mu) &= 0 \\ \mu S^3 &= \text{const.}\end{aligned}$$

Bis zu diesem Punkt ist alles aus der Vorlesung bekannt. Da wir im Verlauf der folgenden Rechnung von $k = 0$ ausgehen, verzichten wir auf die Konvention, S so zu skalieren, dass nur die Werte $k = 0, \pm 1$ möglich sind. Stattdessen nutzen wir die Freiheit zu wählen $S(t_0) = 1$, wobei t_0 die gegenwärtige Zeit bezeichnet. Würde man diese Normierung nicht verwenden, ändert dies an der Rechnung nur einige Details, aber nichts Grundlegendes. Mit der gewählten Normierung gilt:

$$S^3\mu = \mu_0$$

wobei μ_0 die gegenwärtige Energiedichte des Universums ist. Nun betrachten wir die Friedmann Gleichung und nutzen $H = \frac{\dot{S}}{S}$. Weiterhin drücken wir die kosmologische Konstante als zeitlich und räumlich konstante Dichte $\mu_\Lambda = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}$ aus:

$$\begin{aligned}H^2 + \frac{c^2k}{S^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2} (\mu + \mu_\Lambda) & (9.4) \\ H^2 + \frac{c^2k}{S^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \mu_c(t) (\Omega(t) + \Omega_\Lambda(t)) \\ H^2 + \frac{c^2k}{S^2} &= H^2 (\Omega(t) + \Omega_\Lambda(t)).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Definition der kritischen Dichte μ_c genutzt. Für einen flachen Raum gilt $k = 0$ und somit $\Omega(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1$ und damit insbesondere auch:

$$\Omega_0 + \Omega_\Lambda(t_0) = 1 \quad (9.5)$$

$$\Omega_\Lambda(t_0) = \frac{\mu_\Lambda}{\mu_c(t_0)} = 1 - \Omega_0. \quad (9.6)$$

Dies werden wir gleich benötigen. Wir starten noch ein mal bei (9.4) und erweitern die rechte Seite diesmal mit $\mu_c(t_0)$. Zuvor nutzen wir noch $\mu(t) = \mu_0/S^3$:

$$\begin{aligned}H^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\mu_0}{S^3} + \mu_\Lambda \right) \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \mu_c(t_0) \left(\frac{\mu_0}{S^3\mu_c(t_0)} + \frac{\mu_\Lambda}{\mu_c(t_0)} \right) \\ \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 &= H_0^2 \left(\frac{\Omega_0}{S^3} + (1 - \Omega_0) \right)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir (9.6) genutzt und damit die Gleichung aus dem Hinweis bewiesen.

Dies können wir umformen:

$$\frac{dS}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_0 S^{-1} + (1 - \Omega_0) S^2}$$

und dann durch Trennung der Variablen lösen:

$$\int_0^{t_0} dt = \int_0^{S(t_0)=1} \frac{dS}{H_0 \sqrt{\Omega_0 S^{-1} + (1 - \Omega_0) S^2}}.$$

Es ergibt sich

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{dS}{\sqrt{\Omega_0 S^{-1} + (1 - \Omega_0) S^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \int_0^1 \frac{dS \sqrt{S}}{\sqrt{\frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} + S^3}}.$$

Damit ist die Aufgabe schon fast gelöst, denn der Ausdruck auf der rechten Seite hängt nur noch vom momentanen Dichteparameter ab. Um das Integral zu lösen, substituieren wir $u = S^{3/2}$, $du = \frac{3}{2} \sqrt{S} dS$, was mit $a^2 \equiv \Omega_0 / (1 - \Omega_0)$ auf

$$H_0 t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_0}} \operatorname{arcsinh} \frac{u}{a} \Big|_0^1$$

führt. Setzen wir a und die Grenzen ein, so erhalten wir

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_0}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0}}$$

und sind damit fertig. Wir wollen nun natürlich auch wissen, welchen Zahlenwert dieses Ergebnis für das Alter des Universums liefert.

Im März 2013 veröffentlichte Messdaten des Planck-Weltraumteleskops zur Vermessung der kosmischen Hintergrundstrahlung, ergaben für den Hubbleparameter:

$$H_0 = (67 \pm 1.2) \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = (67 \pm 1.2) \frac{10^3 \text{m}}{3.0857 \times 10^{22} \text{m s}} = (2.17 \pm 0.038) 10^{-18} \text{ s}^{-1},$$

für den Dichteparameter der kosmologischen Konstante (bzw. dunkle Energie):

$$\Omega_\Lambda = 0.686 \pm 0.020$$

und für den Dichteparameter für Materie, inklusive dunkler Materie:

$$\Omega_0 = 0.314 \pm 0.020.$$

Quelle: <http://arxiv.org/pdf/1303.5076v1.pdf>

Man sieht, dass die Summe des Dichteparameters der kosmologischen Konstante und der Materie im Rahmen der Messgenauigkeit gleich eins ist. Nach den aktuellen Messungen ist das Universum also (fast) flach.

Wir erhalten:

$$t_0 = \frac{\frac{2}{3 \times \sqrt{0.686}} \operatorname{arcsinh}(1.47808)}{2.17 \times 10^{-18}} \text{ s} = \frac{0.951838 \times 10^{18}}{2.17 \times 3.154 \times 10^7 \text{ s/a}} \text{ s} = 1.39 \times 10^{10} \text{ a},$$

also

$$t_0 = 13.9 \times 10^9 \text{ Jahre}$$

was recht gut mit dem üblicherweise zu findenden Wert übereinstimmt.

Im Teil B können **10 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.