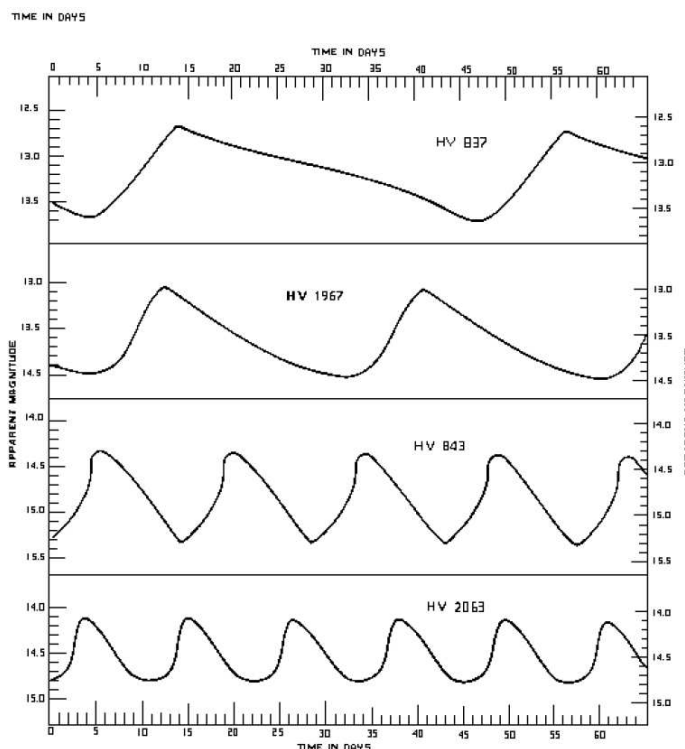


Teil A

1. Cepheiden

5 Pkt.

- (a) Die Abbildung zeigt die Lichtkurven verschiedener etwa gleich weit von uns entfernter Cepheiden. Messen Sie die Länge der Perioden und tragen die Maxima und Minima der Helligkeit gegen diese auf (Zeitachse logarithmisch). Zeigt sich eine Regelmäßigkeit?



- (b) Warum wäre Henrietta Leavitts Entdeckung der Perioden-Leuchtkraft-Beziehung mit Cepheiden aus der Milchstraße nicht ohne Weiteres möglich gewesen?
- (c) Mit dem Hubble-Weltraumteleskop kann man Sterne bis herab zu einer scheinbaren Helligkeit von $m = 30$ mag erkennen. Welches ist die maximale Entfernung, die man mit der Cepheiden-Methode noch bestimmen kann, wenn die absolute Helligkeit der leuchtkräftigsten Cepheiden um einen Mittelwert von etwa $M = -5$ mag oszilliert?

2. Temperatur im Sonneninneren

5 Pkt.

Wir wollen mit einfachen Überlegungen eine Vorstellung von der Temperatur im Innern der Sonne, speziell in der Nähe ihres Mittelpunkts gewinnen. Dazu zerlegen wir gedanklich die Sonne in zwei Halbkugeln (die wir als homogen betrachten), berechnen näherungsweise die gravitative Anziehungskraft zwischen ihnen und ermitteln daraus den mittleren Druck auf die Grundfläche der beiden Halbkugeln. Mithilfe der mittleren Dichte lässt sich dann unter Voraussetzung der Gültigkeit der Zustandsgleichung eines idealen Gases die Temperatur bestimmen.

- (a) Berechnen Sie zunächst die Lage des Schwerpunkts einer Halbkugel. (2 Pkt.)
- (b) Nehmen Sie für die Berechnung der Anziehungskraft an, dass sie denselben Wert hat, wie die von zwei äquivalenten Punktmassen, die in den Schwerpunkten der beiden Halbkugeln sitzen. Berechnen Sie dann Druck und Temperatur. (3 Pkt.)

Zahlenwerte: Sonnenmasse $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^8$ m, Protonenmasse $m_p = 1.66 \times 10^{-27}$ kg (jedem Proton entsprechen ca. 2 freie Teilchen im Gas, nämlich das Proton und ein Elektron, dessen Masse vernachlässigbar ist), Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³/(kg s²), Boltzmannkonstante $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen. Die Besprechung erfolgt dann eine Woche später.

Teil B

1. Uran-Blei-Datierung

7 Pkt.

In dieser Aufgabe wollen wir einige Überlegungen anstellen, wie man mithilfe der bekannten Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls aus dem gemessenen Gehalt bestimmter Isotope in Gesteinen deren Alter bestimmen kann.

Für diese Altersbestimmung interessant sind, wie wir im Einzelnen sehen werden, die Zerfallsreihen der beiden Uran-Isotope ^{235}U und ^{238}U

- Uran-Actinium-Reihe: $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$; Halbwertszeit: $\tau_{235} = 7.04 \times 10^8$ a
- Uran-Radium-Reihe: $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$; Halbwertszeit: $\tau_{238} = 4.47 \times 10^9$ a

Das stabilste und häufigste Blei-Isotop ist ^{208}Pb (es hat einen doppelt magischen Kern), aber auch ^{206}Pb und ^{207}Pb sind stabil.

Folgende Erkenntnisse dienen als Richtschnur bei der Entwicklung einer Methode:

- Die Isotopenverhältnisse *eines* festen Elements in einer Probe können viel genauer bestimmt werden als Isotopenverhältnisse *verschiedener* Elemente.
- Das Uran im Sonnensystem stammt mit Ausnahme des in der Neuzeit von Menschen erzeugten aus der Zeit vor der Entstehung des Planetensystems. Wenigstens gilt dies für die zwei betrachteten Isotope ^{235}U und ^{238}U . Sie wurden ursprünglich in einer Supernova (oder mehreren) erzeugt. Natürliche Prozesse produzieren seit der Entstehung der Sonne diese Isotope praktisch nicht mehr, weil die Halbwertszeit aller noch schwereren Elemente (wie Plutonium), die in die betreffenden Isotope zerfallen könnten, so kurz sind, dass es sie nach ein paar Millionen Jahren nicht mehr in substantieller Menge gab. (Einzig das Isotop ^{234}U wurde und wird weiter produziert, weil es durch Zerfall von ^{238}U entsteht.)
- Die Häufigkeit der beiden Uranisotope ist in verschiedenen Gegenden der Erde verschieden, sie kommen natürlich in Uranerz häufiger vor als in anderen Gesteinen. Aber das *Verhältnis* ihrer Häufigkeiten ist auf der Erde (und im ganzen Sonnensystem) homogen; dies ist das aktuelle *Isotopenverhältnis* in allen Gesteinsarten auf der Erde! Bei einem durch die Gegebenheiten im solaren Urnebel bestimmten anfänglichen Isotopenverhältnis ist das später vorliegende Häufigkeitsverhältnis nur eine Funktion der seither verstrichenen Zeit, solange weder Prozesse auftreten, die neues Uran erzeugen, noch solche, die die beiden Isotope voneinander trennen (was chemische Prozesse gar nicht und physikalische nur sehr ineffizient tun). Es folgt dann allein aus den Halbwertszeiten der Isotope, der verstrichenen Zeit und dem Anfangsquotienten. Das Isotopenverhältnis $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ ist unsere Uhr, mit der wir Zeiten messen können. Darauf basiert die ganze Datierungsmethode, mit der Eigentümlichkeit, dass wir den gegenwärtigen Zeigerstand der Uhr kennen, nicht aber den des früheren Zeitpunkts, den wir ermitteln wollen.

- Für die Verhältnisse *stabiler* Isotope bei *niedrigeren* Ordnungszahlen gelten etwas andere Gesetzmäßigkeiten. Sind beide Isotope nicht Teil (also Endpunkt) einer radioaktiven Zerfallsreihe, so entstehen sie nicht neu, ihr Verhältnis bleibt also über die Zeit konstant. Das gilt zumindest für diejenigen Isotopenpaare, deren relativer Massenunterschied klein ist. Chemisch unterscheiden sich Isotope nicht, also müssen trennende Prozesse physikalischer Natur sein. Der relevante physikalische Unterschied ist aber der Massenunterschied der Atome. Beim Wasserstoff ist der groß; schweres Wasser hat eine Dichte von 1.105 g/cm^3 , könnte sich also in natürlichen Strömungen gegenüber normalem Wasser ab- oder anreichern. Aber bei Massenzahlen jenseits von 100 sind die physikalische Prozesse, die Isotope trennen, rar und ineffizient, wie oben schon bemerkt. Kann mindestens eines von zwei stabilen Isotopen durch radioaktiven Zerfall *entstehen*, dann ist das Isotopenverhältnis prinzipiell *variabel*. Es hängt aber anders als das Verhältnis nicht nachgebildeter zerfallender Isotope *nicht nur* von der Zeit ab. Nehmen wir zur Vereinfachung der Diskussion an, dass beide Isotope aus Zerfallsreihen entstehen, wie es in unserer Aufgabe für ^{207}Pb und ^{206}Pb ja der Fall ist. Dann sind an der Bildung von beiden normalerweise *verschiedene* chemische Elemente beteiligt. Die Bildungsraten hängen davon ab, in welcher Menge diese Elemente zur Verfügung gestellt werden, und da können chemische Prozesse Einfluss nehmen. Nun ist das Anfangselement der Zerfallsreihe zwar hier in beiden Fällen Uran, aber die Reihe geht über mehrere Zwischenstufen, die nicht der gleichen Elementsequenz entsprechen. Das deuten auch die Namen Uran-Actinium-Reihe für $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ und Uran-Radium-Reihe für $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ an. Dass wir trotz vieler Zwischenschritte mit einer einzigen Halbwertszeit rechnen dürfen, liegt daran, dass die Halbwertszeit des ersten Zerfalls in beiden Reihen die Gesamtzeit dominiert.
- Die Isotopenverhältnisse, wie sie bei der Entstehung alter Gesteine herrschten, sind nicht unbedingt bekannt. Aber sie sind für *stabile* Isotope bei gleicher Entstehungsart (z.B. Meteoritengestein im solaren Urnebel) gleich – das ist eine Homogenitätsannahme. (Für die Uranisotope kann sie natürlich nicht gemacht werden, denn da ist das Isotopenverhältnis ja eine Funktion der Zeit.)

Bezeichnen wir die gegenwärtige Zeit mit t_g , die Bildungszeit des zu untersuchenden Gesteins mit t_0 und setzen $\Delta t = t_g - t_0$, so gilt, wenn wir Häufigkeiten eines Isotops mit dessen Namen und einer Zeitkennzeichnung darstellen, offensichtlich:

$$\begin{aligned} {}^{235}\text{U} &\equiv {}^{235}\text{U}(t_g) = {}^{235}\text{U}_0 \times 2^{-\Delta t/\tau_{235}} \\ \Delta {}^{207}\text{Pb} &= {}^{235}\text{U}_0 - {}^{235}\text{U} = {}^{235}\text{U} \left(2^{\Delta t/\tau_{235}} - 1 \right) \\ R_1 &\equiv \frac{{}^{207}\text{Pb}}{{}^{204}\text{Pb}} = \frac{{}^{207}\text{Pb}_0}{{}^{204}\text{Pb}} + \frac{\Delta {}^{207}\text{Pb}}{{}^{204}\text{Pb}} \end{aligned}$$

Eine Häufigkeit ohne Index bezieht sich also auf die Gegenwart, eine mit Index 0 auf die Bildungszeit. $\Delta {}^{207}\text{Pb}$ ist die Differenz zwischen der gegenwärtigen und der zur Zeit t_0 existierenden Menge an ^{207}Pb . Analoge Beziehungen gelten für den Zerfall von ^{238}U , und die entsprechende relative Häufigkeit von ^{206}Pb bezeichnen wir mit R_2 .

^{204}Pb , dessen Häufigkeit im Nenner steht, ist zwar kein stabiles Bleisotop. Aber seine Halbwertszeit ist größer als $1.4 \times 10^{17} \text{ a}$, d.h., es zerfällt mehr als 10^7 mal langsamer als die beiden Uranisotope. Auf der Zeitskala der gegenwärtigen Lebensdauer des Universums kann die in einer Probe durch Zerfall abhanden kommende Menge an ^{204}Pb guten Gewissens vernachlässigt werden, es ist also „nahezu“ stabil. Zum anderen gibt es keine Zerfallsreihe, die ^{204}Pb liefert. Damit nimmt die Häufigkeit von ^{204}Pb in einem Gestein nach dessen

Entstehung auch nicht mehr zu. Es gilt also in extrem guter Näherung $^{204}\text{Pb} = ^{204}\text{Pb}_0$. Hin- gegen gibt es eine Zerfallsreihe, die auf ^{208}Pb führt ($^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ mit einer Halbwertszeit von 1.405×10^{10} a). Deshalb ist es nicht günstig, in der Definition von R_1 und R_2 in den Nenner die Menge an ^{208}Pb zu schreiben.

Messen können wir im Prinzip alle gegenwärtigen Größen, unbekannt sind alle Größen mit Index 0, also $^{235}\text{U}_0$ und $^{238}\text{U}_0$, aber auch die zur Gesteinsbildungszeit bereits vorhandenen Häufigkeiten der stabilen Isotope $^{206}\text{Pb}_0$ und $^{207}\text{Pb}_0$.

Misst man jedoch $R_i(A)$ und $R_i(B)$, $i = 1, 2$ für zwei vor verschiedenen Zeiten Δt_A und Δt_B entstandene Gesteine derselben Art, so kann man $^{206}\text{Pb}_0$ und $^{207}\text{Pb}_0$ eliminieren (die sind für beide Gesteinssorten gemäß der obigen Homogenitätsannahme dieselben).

- (a) Führen Sie diese Elimination durch, d.h. entwickeln Sie eine Formel für (2 Pkt.)

$$q_{AB} \equiv (R_1(A) - R_1(B)) / (R_2(A) - R_2(B)).$$

Grundsätzlich bräuchten wir den Nenner ^{204}Pb in der Definition von $R_{1/2}$ nicht, denn wir interessieren uns nur für das Verhältnis q_{AB} , aus dem wir (bei nicht zu unterschiedlichen Zeiten Δt_A und Δt_B) auf das Verhältnis der Uranisotope zur Entstehungszeit der Gesteine schließen können. Da wir jedoch dieses Verhältnis nicht in *einer* Gesteinsprobe messen können, müssten wir ohne ein drittes Bleisotop zur Ermittlung der Differenzen $R_1(A) - R_1(B)$ bzw. $R_2(A) - R_2(B)$ die *Absolutwerte* von ^{207}Pb und ^{206}Pb in beiden Proben messen, was sehr viel ungenauer ist als die Messung von Isotopenverhältnissen per Massenspektrometrie.

- (b) Nehmen Sie im Weiteren explizit an, dass $|\Delta t_A - \Delta t_B| \ll \tau_{235}, \tau_{238}$ und lösen Sie nach Δt_A (oder Δt_B) auf. (3 Pkt.)

- (c) Berechnen Sie das ungefähre Alter zweier Gesteinsproben, in denen die gemessenen relativen Häufigkeiten von ^{207}Pb und ^{206}Pb die Werte $R_1(A) = 0.4205$, $R_2(A) = 0.4590$ sowie $R_1(B) = 0.4197$, $R_2(B) = 0.4586$ haben. Außerdem ist bekannt, dass das gegenwärtige Verhältnis der beiden Uran-Isotope $^{238}\text{U}/^{235}\text{U} = 137.88$ ist. (2 Pkt.)

Im Teil B können **7 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an antonia.schulz@ovgu.de.