Teil A

3. Stellare Aberration und “absolute” Geschwindigkeit **12 Pkt.**

Beobachtet man einen Stern von der Erde aus, so erscheint er gegenüber seiner „wahren“ (durch zwei Winkel auf der Himmelskugel gegebenen) Position etwas verschoben. Der Grund dafür liegt in der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und der Bewegung der Erde um die Sonne. Diese Aberration hängt (in der speziellen Relativitätstheorie, bzw. bei flachem Raum) von der Relativgeschwindigkeit von Stern und Erde ab und ist für Sterne unbeobachtbar – man hat keinen Zugang zur „wahren“ Position des Sterns, d.h., zu dem Ort, an dem man ihn beobachten würde, wenn Erde und Stern sich zueinander in Ruhe befänden. Was man beobachten *könnte*, sind die verschiedenen Winkel, unter denen der Stern für zwei verschiedene zueinander bewegte Beobachter erschiene, die ihn am selben Ort zur gleichen Zeit beobachten. Was man tatsächlich *beobachtet*, sind die unterschiedlichen Winkel, unter denen der Stern in verschiedenen Bewegungszuständen der Erde erscheint, also die Unterschiede, die ein einzelner Beobachter, dessen Bewegung variiert, zu verschiedenen Zeiten feststellt. Diese *stellare Aberration* ist eine periodische Bewegung des Sterns um eine mittlere Position. Sie beträgt maximal ca. 20 Bogensekunden und ist *unabhängig von der Geschwindigkeit des beobachteten Sterns*.

Diese unerwartete Tatsache führt immer wieder zu Verwirrung, weil sie Aussagen der Relativitätstheorie zu widersprechen scheint, nach der es keinen Unterschied machen sollte, ob der Stern sich bewegt und die Erde ruht oder umgekehrt. Wenn Aberration aber nur von der Geschwindigkeit des Beobachters, nicht aber von der des beobachteten Objekts abhängt, scheint das falsch zu sein, die vom Relativitätsprinzip geforderte Symmetrie verletzt.

In einem Artikel von G. Sardin (Measure of the absolute speed through the Bradley aberration of light beams on a three-axis frame, Europhys. Lett. **53**, (2001) 310) wird ein Gerät beschrieben, mit dem es möglich sein soll, *absolute* Geschwindigkeiten zu messen. Dieses Gerät beruht darauf, eine Lichtquelle mit einem Beobachter mitzubewegen, zu zwei Zeitpunkten zwei verschiedene Aberrationen zu messen und daraus die Geschwindigkeit des Beobachters zu bestimmen.[1] Streng genommen ist das auch keine absolute Geschwindigkeitsmessung, weil man nur den Unterschied der Geschwindigkeiten vor und nach der Messung bestimmt hat, aber man könnte im Prinzip auf der Basis lokaler Messungen eine Geschwindigkeitsskala eichen, die Geschwindigkeiten direkt mit Aberrationswinkeln korreliert. Das widerspräche dem Relativitätsprinzip, nach dem lokale Messungen in allen Inertialsystemen gleich ablaufen, also unterschiedlichen Geschwindigkeiten nicht unterschiedliche gemessene Winkel entsprechen können.

(a) Betrachten Sie zunächst einen Stern, der sich im Koordinatensystem Σ in Ruhe befindet und einen Beobachter, der sich mit der Geschwindikeit $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$ bewegt. Im Ruhesystem Σ' des Betrachters bewegt sich der Stern dann mit der Geschwindigkeit $-\boldsymbol{V}$. (3 Pkt.)

Ein Lichtstrahl wird vom Stern unter einem Winkel ϑ zur x-Achse ausgesendet. Zeigen Sie, dass für den vom Beobachter gemessenen Winkel ϑ' gilt:

$$\tan\frac{\vartheta'}{2} = \tan\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{c-V}{c+V}} \tag{3.1}$$

[1] Hier ist prinzipiell auch die Messung der wahren Aberration möglich, die man auch als Unterschied in den Richtungen des von der Lichtquelle ausgesendeten und des vom Sensor empfangenen Lichtstrahls definieren kann.

Betrachten Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor des Lichtstrahls in beiden Systemen (nehmen Sie an, er liegt in der xy-Ebene) und wählen Sie die Winkel so, dass sie bei $V = 0$ Wechselwinkel wären. (Sonst müsste einer der Tangens zu einem Kotangens werden.)

Hinweis: Das System Σ' bewegt sich mit $\boldsymbol{V}$ gegenüber Σ. In Σ' bewege sich ein Körper mit $\boldsymbol{u}'$. Die Geschwindigkeit des Körpers in Σ ist $\boldsymbol{u}$ und wird mit dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten berechnet. Es lautet in vektorieller Form:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\parallel} + \boldsymbol{u}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{u}'_{\parallel} + \boldsymbol{V}}{1 + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{u}'/c^2} + \frac{\boldsymbol{u}'_{\perp}}{\gamma(1 + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{u}'/c^2)}, \tag{3.2}$$

wobei $\boldsymbol{u}_{\parallel} \equiv \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{u})/V^2$ und $\boldsymbol{u}_{\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\parallel}$ die zur Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ der beiden Systeme parallele und senkrechte Geschwindigkeitskomponente von $\boldsymbol{u}$ sind. $\boldsymbol{u}'_{\parallel}$ und $\boldsymbol{u}'_{\perp}$ sind die entsprechenden Größen in Σ'. Ferner ist $\gamma = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$.
Eine nützliche trigonometrische Formel ist

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \tag{3.3}$$

(b) Setzen Sie $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, nehmen Sie an, dass $V/c \ll 1$ und leiten Sie aus (3.1) die in der Vorlesung besprochene nichtrelativistische Näherung (2 Pkt.)

$$\sin\alpha = \frac{V}{c}\sin\vartheta' \tag{3.4}$$

her. Offensichtlich muss auch $\alpha \ll 1$ gelten, was man ausnützen kann.

(c) Führen Sie nun dieselbe Betrachtung wie in Teil (a) aus Sicht eines dritten Systems $\tilde{\Sigma}$ durch, in dem der Stern ruht und der Beobachter sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegt $\left(\tilde{\Sigma} = \Sigma\right)$. Wie lautet der Winkel $\tilde{\vartheta}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ'? (2 Pkt.)

(d) Betrachten Sie nun zwei Beobachter, die sich mit Geschwindgkeiten $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ bewegen, in dem Moment, in dem sie sich treffen. Beide beobachten einen Stern, der sich mit einer unbekannten Geschwindigkeit $\boldsymbol{W}$ bewegt und messen eine *relative* Aberration $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Der *wahre* Sichtwinkel ϑ, gemessen im Ruhesystem des Sterns, ist unbekannt. Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den gemessenen Winkeln ϑ_1 und ϑ_2 und zeigen Sie, dass dieser nur von der Relativgeschwindigkeit (3 Pkt.)

$$V_{21} = \frac{V_2 - V_1}{1 - \frac{V_1 V_2}{c^2}} \tag{3.5}$$

abhängt.

Hinweis: Drücken Sie die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 durch die Relativgeschwindigkeiten zum Stern $V^S_{1,2}$ sowie den Winkel ϑ aus und ersetzen Sie diese dann durch die Geschwindigkeiten V_1, V_2 und W und eliminieren Sie ϑ.

(e) In dem in der Einleitung beschriebenen Gerät existiert nur ein Beobachter, der zu zwei verschiedenen Zeiten misst (mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten V_1 und V_2). Anders als beim Stern ist die Geschwindigkeit der Lichtquelle nicht konstant, sondern jeweils gleich der Geschwindigkeit des Beobachters ($W_{1,2} = V_{1,2}$). Wie groß ist die auf diese Weise gemessene Aberration? (2 Pkt.)

4. Thermische Zeitskala **3 Pkt.**

Die *thermische Zeitskala* ist die Zeit, in welcher der Stern seine thermische Energie ohne Energieproduktion abstrahlen würde und entspricht der Zeit, welche die Strahlung von ihrer Entstehung nahe am Sternenmittelpunkt bis zur Oberfläche benötigt. Man kann die thermische Zeitskala abschätzen, indem man annimmt, dass Photonen aus dem Inneren der Sonne aufgrund dauernder Absorption und Reemission eine Zufallswanderung unternehmen. Beträgt die mittlere freie Weglänge pro Schritt einer solchen Wanderung ℓ, so hat sich der „Wanderer" nach N Schritten im Mittel um eine Strecke $\sqrt{N}\,\ell$ von seinem Ausgangspunkt entfernt. Nehmen Sie an, dass die mittlere freie Weglänge eines Photons überall in der Sonne dieselbe ist und berechnen Sie unter der Annahme $\ell = 10^{-4}$ m die Wegstrecke, die es auf dem Weg vom Mittelpunkt bis zum Rand der Sonne zurücklegen muss, und wie lange es dafür braucht.

Erwarten Sie, dass das korrekte Ergebnis größer oder kleiner als diese Abschätzung wird? (Es unterscheidet sich um etwa eine Größenordnung.)

Zahlenwerte: Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^8$ m, Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

2. Dynamische Zeitskala eines Sterns **8 Pkt.**

Die Entwicklung eines Sterns wird durch Prozesse mit verschiedenen charakteristischen Zeitskalen bestimmt. Die *nukleare Zeitskala* erhält man als Quotient aus dem nuklearen Energievorrat eines Sterns und seiner während der Phase seiner nuklearen Energieproduktion abgestrahlten mittleren Leistung (Sonne: 10^{10} Jahre). Die *thermische Zeitskala* ist die Zeit, in welcher der Stern seine thermische Energie ohne Energieproduktion abstrahlen würde und entspricht der Zeit, welche die Strahlung von ihrer Entstehung nahe am Sternenmittelpunkt bis zur Oberfläche benötigt (Sonne: 2×10^7 Jahre). Die *dynamische Zeitskala* τ_{ff} beschreibt, in welcher Zeit ein Stern unter seiner Gravitation kollabieren würde, wenn sein stabilisierender innerer Druck wegfiele. Diese Zeit wollen wir hier berechnen.

(a) Betrachten Sie ein Massenelement am Rand des Sterns und stellen Sie dessen Bewegungsgleichung unter der Annahme verschwindenden inneren Drucks auf. Wie groß ist die in der Bewegungsgleichung auftretende Zentralmasse? (2 Pkt.)

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Berechnung von $t(r)$, d.h., der Fallzeit bis zum Radius r [wobei $r(t=0) = R$ (Anfangsradius des Sterns), $\dot{r}(t=0) = 0$]. Wie lange dauert es, bis der Stern vollständig kollabiert ist? *Hinweis:* Es ist nützlich (aber nicht absolut notwendig), die Formel durch Reskalieren von Längen und Zeiten dimensionslos zu machen. Folgendes Integral sollte in Ihrer Rechnung auftreten: (4 Pkt.)

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = -\sqrt{x(1-x)} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad 0 < x < 1$$

(c) Werten Sie die Freifallzeit τ_{ff} zahlenmäßig aus für (2 Pkt.)

- die Sonne
- eine kugelförmige Gaswolke von 100 Sonnenmassen mit 4 pc Durchmesser

- eine kugelförmige Galaxie von 3×10^{10} Sonnenmassen mit 30 kpc Durchmesser

Zahlenwerte: Sonnenmasse $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, Sonnenradius $R = 6.96 \times 10^{8}$ m, Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/(kg s^2).

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.