Teil A

7. Kinematik auf dem Gummiband **5 Pkt.**

Ein extrem langes, unendlich elastisches, homogenes Gummiband der Ruhelänge $\mathcal{L}_0$ wird durch eine ab einem Zeitpunkt $t = t_0$ angreifende externe Kraft gedehnt. Die Dehnung ϵ lässt sich als Funktion der Zeit angeben und sei homogen:

$$\epsilon(t) = \frac{\Delta\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}_0} \,.$$

Für die aktuelle Länge des Gummibandes gilt folglich

$$\mathcal{L}(t) = L_0 + \Delta\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_0 = \underbrace{(1+\epsilon)}_{:=a(t)}\mathcal{L}_0 \,,$$

den hier definierten Faktor $a(t)$ nennen wir Skalenfaktor. Da das Gummiband zur Zeit t_0 seine Ruhelänge hatte, gilt offenbar $a(t_0) = 1$.

Hinweis: Es ist günstig, ein auf dem Gummiband angebrachtes und mit diesem expandierendes Koordinatensystem einzuführen. Beachten Sie dabei, dass sich die Abstände der Koordinatenmarkierungen des mitbewegten Systems ändern.

(a) Auf dem Gummiband seien zwei Punkte farbig markiert. Diese haben zu einer Zeit $t_1 \geq t_0$ den Abstand L. Geben Sie einen Ausdruck für die Relativgeschwindigkeit des einen Punkte bzgl. des anderen an, der nur von $a(t), \dot{a}(t)$ und L abhängt. (2 Pkt.)

(b) Nehmen Sie nun an, dass der Skalenfaktor linear mit der Zeit wächst, es gelte $a(t) = \mu t$. Stellen Sie sich vor, Sie stehen auf dem Gummiband und im Abstand L von Ihnen befindet sich ein Auto auf dem Gummiband, das mit seiner Höchstgeschwindigkeit c (relativ zum Gummiband) auf sie zu rast. Geben Sie die Entfernung zwischen sich selbst und dem Auto als Funktion der Zeit an. Können Sie sich in Sicherheit wiegen, wenn L hinreichend groß ist? Falls Sie nicht in Sicherheit sind, können Sie dem Auto durch Weglaufen mit einer Geschwindigkeit $v < c$ entkommen? (2 Pkt.)

(c) Die Kinematik auf dem Gummiband entspricht im wesentlichen der Kinematik eines expandierendem Universums. Gilt dies auch für die Dynamik (nach Newton) auf dem Gummiband? Gilt insbesondere Homogenität und Isotropie des „Raums" auf dem Gummiband? (1 Pkt.)

8. Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors - Teil 2 **4 Pkt.**

In der Aufgabe „Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors" wurden die folgenden Symmetrierelationen bewiesen

$$R_{iklm} = -R_{ikml}, \quad R_{iklm} = -R_{kilm}, \quad R_{iklm} = R_{lmik}, \quad R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0 \qquad (8.1)$$

(a) Benützen Sie die Symmetrien, um die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors in zwei, drei und vier Dimensionen zu bestimmen. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass der Ricci-Tensor $R_{kl} = R^i{}_{kli}$ symmetrisch ist. (1 Pkt.)

9. Metrik-Bestimmungen **7 Pkt.**

Ist der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ im n-dimensionalen Raum als Funktion eines Satzes von unabhängigen (krummlinigen) Koordinaten $q_1, q_2, \ldots q_n$ gegeben

$$\boldsymbol{r} = \sum_i q_i \mathcal{E}_{q_i},$$

so erhält man die *Koordinatenbasis* durch Bilden der partiellen Ableitungen nach den q_i:

$$\mathcal{E}_{q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Eine dazu *reziproke* Basis ist durch

$$\mathcal{E}^{q_i} = \nabla q_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots n\,,$$

gegeben, wobei der Gradient im betreffenden n-dimensionalen Raum zu nehmen ist. Jeder Vektor $\boldsymbol{A}$ des Raumes kann gemäß

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} A^i \mathcal{E}_{q_i} = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathcal{E}^{q_i}$$

als Linearkombination ausgedrückt werden, wobei man die A^i $(= \mathcal{E}^{q_i} \cdot \boldsymbol{A})$ *kontravariante* Komponenten des Vektors nennt und die A_i $(= \boldsymbol{A} \cdot \mathcal{E}_{q_i})$ als seine *kovarianten* Komponenten bezeichnet. Basis und reziproke Basis bilden ein *Biorthogonalsystem*.

Die Komponenten des metrischen Tensors sind gegeben durch

$$g_{ij} = \mathcal{E}_{q_i} \cdot \mathcal{E}_{q_j}$$

und die des inversen Metriktensors durch

$$g^{ij} = \mathcal{E}^{q_i} \cdot \mathcal{E}^{q_j}\,. \qquad (*)$$

(a) Leiten Sie Koordinatenbasis und Metriktensor für die Oberfläche einer Kugel mit Radius R in Kugelkoordinaten ϑ, φ ab. (2 Pkt.)

(b) Die reziproke Basis ist hier (2 Pkt.)

$$\mathcal{E}^{\vartheta} = \nabla_s \vartheta\,, \quad \mathcal{E}^{\varphi} = \nabla_s \varphi\,,$$

wobei ∇_s den Gradienten auf der Kugeloberfläche, den *Oberflächengradienten*, kennzeichnet. In unserem Fall ist er berechenbar durch $\nabla_s = \nabla - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r \cdot \nabla)$ (wobei $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$). Bestimmen Sie die reziproke Basis und verifizieren Sie, dass der inverse Metriktensor die Relation $(*)$ erfüllt.

(c) Eine Kegelmantelfläche kann parametrisiert werden durch (3 Pkt.)

$$\boldsymbol{r} = r \sin\alpha \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_x + r \sin\alpha \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_y + r\cos\alpha\, \boldsymbol{e}_z\,, \qquad 0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Hier ist α der Öffnungswinkel des Kegels, also konstant. Die Variablen sind r und φ. Bestimmen Sie eine Koordinatenbasis auf dem Kegelmantel und die Metrik. Zeigen Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation, dass die Metrik einen flachen Raum beschreibt (d.h., dass die Krümmung verschwindet).

Anmerkung: Wenn Sie keine geeignete Koordinatentransformation finden, können Sie auch den riemannschen Krümmungstensor berechnen, um das zu beweisen. Aber die Koordinatentransformation sollte der schnellere Weg sein.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

5. Geometrische Bedeutung der Christoffelsymbole **5 Pkt.**

Betrachten wir eine durch die Koordinaten q_i festgelegte Koordinatenbasis:

$$\mathcal{E}_{q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\,, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Ist klar, um welche Koordinaten es sich handelt, kann man die Notation etwas kompaktifizieren, indem man statt $\mathcal{E}_{q_i}$ einfach $\mathcal{E}_i$ schreibt. Der metrische Tensor lässt sich dann bestimmen aus

$$g_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j\,.$$

Zeigen Sie, dass die Christoffelsymbole zweiter Art durch

$$\Gamma^i_{jk} = \mathcal{E}^i \cdot \partial_{q_j} \mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}^i \cdot \partial_j \mathcal{E}_k \qquad (*)$$

gegeben sind ($\mathcal{E}^i = \nabla q_i$, bilden zusammen mit den $\mathcal{E}_k$ ein Biorthonormalsystem).

Das heißt, wenn die partielle Ableitung ein Vektor des betrachteten riemannschen Raums ist, sind die Christoffelsymbole die Entwicklungskoeffizienten von $\partial_j \mathcal{E}_k$ bezüglich der gegebenen Koordinatenbasis. (Am Beispiel der gekrümmten Kugeloberfläche erkennt man leicht, dass dies nicht immer der Fall ist. Es gilt etwa $\partial_\vartheta \mathcal{E}_\vartheta = -R\,\boldsymbol{e}_r$, und das ist kein auf der Kugeloberfläche definierter Vektor.) Andernfalls sind sie die Entwicklungskoeffizienten der Projektion von $\partial_j \mathcal{E}_k$ auf den riemannschen Raum.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass $\partial_j \mathcal{E}_k = \partial_k \mathcal{E}_j$ sowie $\mathcal{E}_j = g_{jk} \mathcal{E}^k$, und spielen Sie dann mit den Formeln, um die bekannte Darstellung der Christoffelsymbole zu erhalten.

Im Teil B können **5 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.