

Teil A

10. Bewegung im Gravitationsfeld

14 Pkt.

Nach dem einsteinschen Äquivalenzprinzip sind Trägheitskräfte und Gravitationskräfte wesensgleich. Dies hat zur Folge, dass es immer ein Koordinatensystem gibt, in dem sich Trägheitskräfte und Gravitationskräfte gegenseitig lokal kompensieren. (Das ist eine newtonsche Sichtweise. Allgemeinrelativistisch würde man sagen, dass Gravitationskräfte lokal als Folge von Beschleunigung relativ zu einem Inertialsystem, also als Trägheitskräfte interpretiert werden können. Folglich gibt es immer ein lokales Bezugssystem, in dem sie verschwinden. Das ist das – frei fallende – Inertialsystem.) In solch einem lokalen Inertialsystem haben die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie Gültigkeit. Insbesondere wird ein kräftefreies Teilchen durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (10.1)$$

beschrieben. Weiterhin gilt in diesem System die Minkowski-Metrik

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta, \quad (10.2)$$

wobei $\eta_{\alpha\beta}$ der übliche metrische Tensor für die Minkowski-Metrik ist. Betrachten wir nun ein globales Koordinatensystem mit den Komponenten x^μ . In jedem Punkt P existiere eine Koordinatentransformation $\zeta^\alpha(x) = \zeta^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit der Eigenschaft, dass (10.2) gelte. Diese Koordinatentransformation gilt nur für diesen Punkt, die Funktionen ζ^α sind also nicht global definiert, sondern nur jeweils in der Umgebung des Aufpunkts. (Die ζ^α können demnach für jeden Punkt neue Funktionen $\zeta^\alpha_{\{x^i\}}$ sein.) Für das globale System gelte:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

(a) Zeigen Sie: (2 Pkt.)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (10.3)$$

(b) Zeigen Sie, dass der Ausdruck (4 Pkt.)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (10.4)$$

die Christoffelsymbole darstellt:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right).$$

(c) Zeigen Sie dann, dass für die Bewegung im Gravitationsfeld die Gleichung (4 Pkt.)

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (10.5)$$

gilt. Man sieht, dass aus dem Äquivalenzprinzip und insbesondere aus der Forderung, dass sich Gravitationskräfte lokal wegtransformieren lassen sowie der SRT die Bewegungsgleichung für ein Teilchen im Gravitationsfeld folgt. Was fehlt hier noch, um die Bewegung einer gegebenen Massenverteilung wirklich berechnen zu können und damit eine Theorie dafür zu haben?

- (d) Es seien zwei Punkte A und B in dem globalen Koordinatensystem vorgegeben, die zeitartig zueinander liegen. Zeigen Sie, dass die Suche nach einer extremalen Verbindung zwischen den Punkten: (4 Pkt.)

$$\int_A^B ds \stackrel{!}{=} \text{extremal.}$$

zu Gleichung (10.5) als notwendige Bedingung führt. (Für zeitartige Geodäten heißt extremal maximal, nicht minimal.)

Hinweis: Erinnern Sie sich an Ihre Vorlesung zur Theoretischen Mechanik. Was haben Sie dort über das Hamiltonsche Prinzip gelernt?

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

6. Christoffelsymbole

4 Pkt.

Berechnen Sie die Christoffelsymbole für

- (a) Den dreidimensionalen flachen Raum mit Kugelkoordinaten (3 Pkt.)
 (b) Den dreidimensionalen flachen Raum mit Zylinderkoordinaten (1 Pkt.)

Hinweis: Es gilt $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Die x^μ sind die Komponenten der Koordinaten.

7. Friedmann-Gleichung heuristisch

4 Pkt.

Nehmen Sie eine homogene isotrope unendlich ausgedehnte Massenverteilung an, die gleichmäßig expandiert. Die einzige zu berücksichtigende Wechselwirkung sei die Gravitation. Unter diesen Voraussetzungen kann man den Ortsvektor eines beliebigen Teilchens der Massenverteilung zum Zeitpunkt t durch $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}$ beschreiben. Dabei ist \mathbf{x} die Position des Teilchens in einem mitexpandierenden Koordinatensystem.

- (a) Bestimmen Sie die Energie $U = T + V$ eines Teilchens der Masse m im Abstand r vom Koordinatenursprung, wobei T die kinetische und V die potentielle Energie des Teilchens im Rahmen der newtonschen Mechanik ist. Nehmen Sie dazu eine homogene Massenverteilung mit der Dichte ρ an. Die Geschwindigkeit des Teilchens sei ausschließlich radial. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe des Skalenfaktors $a(t)$ und einer mitbewegten Koordinate aus. (2 Pkt.)
 (b) Aus der Homogenität folgt, dass die obige Gleichung für alle Abstände von Teilchen gelten muss. Drücken Sie $r(t)$ durch x aus und zeigen Sie, dass gilt: (2 Pkt.)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2},$$

wobei k durch $kc^2 := -2U/mx^2$ definiert ist, c die Lichtgeschwindigkeit darstellt und G die Gravitationskonstante ist. Warum kann unter unseren Annahmen k nicht vom Ort abhängen?

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an antonia.schulz@ovgu.de.