Teil A

11. DeSitter-Kosmos **10 Pkt.**

Eine Form des Linienelements des DeSitter-Kosmos ist gegeben durch:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/a}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \,. \tag{11.1}$$

(a) Bestimmen Sie den Krümmungsindex k, die Hubble-Funktion $H(t)$, den Dezelerationsparameter $q_0(t)$ sowie die Zustandsgleichung $p = p(\mu)$. Was folgern Sie daraus für die möglichen Werte von μ und p, solange keine dunkle Energie mit exotischen Eigenschaften angenommen wird? (3 Pkt.)

(b) Geben Sie den Wert der kosmologischen Konstante an. (1 Pkt.)

(c) Man kann behaupten, dass (11.1) ein statisches Universum beschreibt (neben dem einsteinschen). Überprüfen Sie die Plausibilität dieser Behauptung, indem Sie eine zeitliche Translation $t \to t' = t + t_0$ des Linienelements durchführen. Lässt sich durch eine geeignete räumliche Transformation Invarianz des Linienelements erreichen? (2 Pkt.)

(d) Führen Sie durch (4 Pkt.)

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha e^{ct/a}\,, \qquad \alpha = 1, \dots 3$$

$$e^{c\tilde{t}/a}\sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{r}}{a}\right)^2} = e^{ct/a}\,, \qquad \tilde{r}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\tilde{x}^\alpha\right)^2$$

neue Koordinaten ein und zeigen Sie explizit, dass diese ein statisches Linienelement produzieren (d.i. ein Linienelement, in dem kein metrischer Koeffizient von der Zeitkoordinate abhängt und die Metrik diagonal ist). Was passiert bei $\tilde{r} = a$?

Hinweis: Es lohnt sich, Kugelkoordinaten einzuführen, d.h. die $\tilde{x}^\alpha$ durch $\tilde{r}$, $\tilde{\vartheta}$ und $\tilde{\varphi}$ zu ersetzen.

Anmerkung: Die DeSitter-Raumzeit entspricht einem vierdimensionalen Raum konstanter Krümmung, der ein Hyperboloid $\mathbb{H}^4$ in einem fünfdimensionalen Raum mit Lorentzsignatur darstellt. Sie kann als Verallgemeinerung des Minkowski-Raums für eine Raumzeit mit nicht verschwindender kosmologischer Konstante angesehen werden.

12. Einstein-DeSitter-Universum, Abstand sichtbarer Objekte **6 Pkt.**

Im Einstein-DeSitter-Universum gilt für den Expansionsskalar:

$$S(t) = S(t_o)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{2/3} \,,$$

wobei t_o die Jetztzeit und t eine beliebige andere positive Zeit ist. Wir fragen nun danach, welche der Objekte, die wir heute sehen können, zur Zeit der Lichtaussendung am weitesten von uns entfernt waren.

Den mit unserer Galaxis verknüpften Fundamentalbeobachter setzen wir an die Koordinate $\rho = 0$, den mit der beobachteten Galaxie, der Lichtquelle, verknüpften an die Koordinate $\rho = \rho_e$. Die räumliche Maßstabsentfernung werde mit $\ell(t_o, t_e)$, bezeichnet, sie hängt natürlich vom Aussendezeitpunkt t_e des uns heute erreichenden Lichts ab. Es gilt

$$\ell(t_o, t_e) = S(t_e)\rho_e = cS(t_e)\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{S(t)} \,.$$

(a) Berechnen Sie den Aussendezeitpunkt $t_e = t^*$ derjenigen Quellen, deren Licht zur Zeit t_o ankommt, die zum Zeitpunkt der Aussendung den größten Abstand zum Beobachter bei $\rho = 0$ hatten. (3 Pkt.)

(b) Welche Relativgeschwindigkeit hatte die Quelle zu diesem Zeitpunkt gegenüber unserem Standort? Geschwindigkeit sei definiert als die Vergrößerung der Maßstabsentfernung pro Einheit der Emissionszeit. (2 Pkt.)

(c) Welche Rotverschiebung beobachten wir heute für diese Quelle(n)? (1 Pkt.)

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

8. Statisches Universum: der Einstein-Kosmos **6 Pkt.**

In der Vorlesung werden die Friedmann-Lemaître-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2\frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\mu \tag{8.1}$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{c^2 k}{S^2} - c^2\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}p \tag{8.2}$$

abgeleitet. Hierin ist $S = S(t)$ der Expansionsskalar (dessen Zeitabhängigkeit Auskunft zur Ausdehnung oder Schrumpfung des Universums gibt), $k \in \{1, 0, -1\}$ der Krümmungsindex, Λ die kosmologische Konstante, μ die Energiedichte und p der Druck. (c ist die Lichtgeschwindigkeit.)

Der Einstein-Kosmos ist eine statische Lösung dieser Gleichungen mit $\dot{S} = 0$, $\ddot{S} = 0$.

(a) Bestimmen Sie den (hier als Krümmungsradius interpretierbaren) Expansionsskalar S_E und die kosmologische Konstante Λ_E für diese Lösung unter der Annahme $\mu > 0$, $p = 0$. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Konstanten $C = c^2\kappa\,\mu S^3/3$ aus, die der Energiesatz für Staubuniversen liefert. Was folgt für den Krümmungsindex k? Ist auch ein statisches Universum für $k = 0$ denkbar? (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass der Einstein-Kosmos instabil ist gegenüber kleinen Störungen $S_E \to S_E + \delta S$, $\mu_E \to \mu_E + \delta\mu$, die schwarzer Strahlung entsprechen ($\delta p = \delta\mu/3$). (3 Pkt.)
Hinweis: Man setzt die um die jeweilige Störung veränderten Größen in die Friedmann-Lemaître-Gleichungen (mit festen Parametern k und Λ) ein und linearisiert in den Störungen, das erzeugt ein lineares Gleichungssystem für δS und $\delta\mu$. Zu diskutieren ist dann, ob dessen Lösungen gegen null gehen oder anwachsen.

9. Alter des Universums **4 Pkt.**

Nehmen Sie ein flaches, materiedominiertes Universum an, dessen Expansion durch die Friedmann-Lemaître Gleichungen, einschließlich kosmologischer Konstante, beschrieben wird. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck[1] für das Produkt aus dem momentanen Hubble-Parameter H_0 und dem Alter des Universums t_0, der nur von dem momentanen Dichteparameter $\Omega_0 = \mu(t_0)/\mu_c(t_0)$ des Universum abhängt. Hierbei ist $S(t)$ der

[1] Mit geschlossenem Ausdruck ist hier eine explizite Gleichung ohne Integral- oder Summenzeichen gemeint.

Skalenfaktor des Universums, $\mu(t)$ die Energiedichte des Universums und $\mu_c(t)$ die zugehörige kritische Dichte:

$$\mu_c(t) = \frac{3H^2c^2}{8\pi G},$$

und $H(t)$ der Hubble Parameter

$$H(t) = \frac{\dot{S}}{S}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = H_0^2\left[\frac{\Omega_0}{S^3} + (1-\Omega_0)\right] \qquad \left(\text{oder: } \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_0\frac{S_0^3}{S^3} + (1-\Omega_0)\right]\right)$$

verwenden sie dabei die Konvention $S(t_0) = S_0 = 1$.

Im Teil B können **10 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.