13. Wissensfragen **21 Pkt.**

(a) Erläutern Sie die Begriffe Entfernungsmodul, absolute und scheinbare Helligkeit. (3 Pkt.)

(b) Was versteht man unter einer Cepheide? Wofür sind Cepheiden nützlich? (2 Pkt.)

(c) Was versteht man unter dem kosmologischen Prinzip? Was folgt daraus für die Krümmung des Raumes? (3 Pkt.)

(d) Welche drei fundamentalen empirischen Beobachtungen muss ein kosmologisches Modell erklären? (3 Pkt.)

(e) Geben Sie eine Größenordnung für den Durchmesser eines weißen Zwergs an. Wodurch wird sein Kollaps verhindert und welche Masse darf er nicht überschreiten, damit dies möglich ist? Geben Sie deren ungefähre Größe an.[1] (2 Pkt.)

(f) Wie erklärt die allgemeine Relativitätstheorie die Gravitation? Ist sie eine Kraft? Welche Größe ist die Quelle der Gravitation?[2] (3 Pkt.)

(g) Längs welcher Art von Bahn bewegt sich ein Teilchen, das nur der Gravitation unterworfen ist, nach der allgemeinen Relativitätstheorie? (2 Pkt.)

(h) Wie entstanden die meisten schwereren Elemente (Elemente jenseits des Lithiums)? (1 Pkt.)

(i) Was versteht man unter einem Ereignishorizont? Wie macht sich das Erreichen des Ereignishorizonts oder Grenzkegels durch eine Galaxie optisch bemerkbar? (2 Pkt.)

14. Horizonte im DeSitter-Kosmos **9 Pkt.**

In einem DeSitter-Kosmos ($k = 0$) sei der Expansionsskalar gegeben durch

$$S(t) = S_0\, e^{ct/a} \qquad (a = \text{const.})$$

und der Kosmos beginne seine Existenz bei $t = 0$ (mit der „Größe“ S_0). Unsere Milchstraße befinde sich bei $\rho = 0$.

(a) Bestimmen Sie den Ereignishorizont unserer Galaxis als Funktion der Zeit. (1 Pkt.)

(b) Mit welcher Geschwindigkeit (Änderung der Maßstabsentfernung pro Zeit) bewegt sich eine Galaxie am Ereignishorizont? (2 Pkt.)

(c) Berechnen Sie den Teilchenhorizont. Wie groß wird er maximal (in mitbewegten Koordinaten)? (2 Pkt.)

(d) Wie groß ist die Geschwindigkeit einer Galaxie am Teilchenhorizont? (1 Pkt.)

(e) Welche Rezessionsgeschwindigkeit darf eine Galaxie nicht überschreiten, damit ihr Licht uns noch erreicht? (3 Pkt.)

15. Ein kosmologisches Modell **8 Pkt.**

$$ds^2 = c^2 dt^2 - c^2 t^2 \left[d\chi^2 + \sinh^2\chi \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2 \right) \right] \tag{15.1}$$

mit $t \in (0, \infty)$ und $\chi \in (0, \infty)$ beschreibt ein kosmologisches Modell.

(a) Welchen Wert hat der Krümmungsindex? (Hinweis: Setzen Sie $\rho = \sinh\chi$.) Bestimmen Sie den Bremsparameter $q(t)$. (2 Pkt.)

(b) Gibt es in diesem Modell einen Teilchenhorizont? (2 Pkt.)

[1] Nicht notwendigerweise in kg...

[2] Es ist nicht nötig, die einsteinschen Feldgleichungen hinzuschreiben. Eine rein verbale Antwort reicht aus. Verboten sind Formeln natürlich nicht, aber ihre Terme müssen erläutert werden. Das Ergebnis sollte eine „Erklärung“ sein.

(c) Führen Sie neue Koordinaten $T = t\cosh\chi$, $R = ct\sinh\chi$ ein. Zeigen Sie auf diese Weise, dass die durch (15.1) charakterisierte Raumzeit eine Teilmenge des Minkowski-Raums ist. Skizzieren Sie diese in der $R\,cT$-Ebene. Beschreiben Sie qualitativ die Flächen mit konstantem t. Können Sie eine Aussage zur Krümmung des Raumes in den durch (15.1) beschriebenen Koordinaten und zu der der Raumzeit in diesem Modell treffen? (4 Pkt.)

16. Sturz in ein schwarzes Loch **11 Pkt.**

Die Metrik eines nicht rotierenden ungeladenen schwarzen Lochs ist gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{rc^2}} \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, \mathrm{d}\varphi^2 \tag{16.1}$$

Im Folgenden schreiben wir der Kürze halber für den Schwarzschildradius $2GM/c^2$ nur noch $2M$ (d.h. wir setzen formal $G = c = 1$).

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens, das sich in dieser Metrik bewegt, lassen sich zwar mithilfe der Geodätengleichung aus der Vorlesung aufstellen; einfacher ist hier aber eine direkte Bestimmung aus der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\,ct}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \dfrac{2M}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\vartheta\,\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right\}, \tag{16.2}$$

die zu den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{16.3}$$

führt (das stellt eine ökonomische Methode dar, die Christoffelsymbole zu berechnen).

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Anfangsbedingung $\vartheta(0) = \pi/2$, $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\tau|_{t=0} = 0$ dazu führt, dass das betrachtete Teilchen in der Fläche $\vartheta = \pi/2$ verbleibt. Wir können also eine vereinfachte Lagrangefunktion betrachten. (1 Pkt.)

(b) Verwenden Sie die Tatsache, dass φ und t zyklische Koordinaten sind, um einen Drehimpulssatz und ein weiteres Integral der Bewegung aufzustellen. (2 Pkt.)

(c) Als dritte Bewegungsgleichung erster Ordnung verwenden Sie die Definitionsgleichung der Eigenzeit. Eliminieren Sie daraus $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$. (3 Pkt.)

(d) Betrachten Sie nun eine radiale Bahn, also eine Bahn mit verschwindendem Drehimpuls. Berechnen Sie die Fallzeit t eines Teilchens, das irgendwann im Unendlichen mit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ gestartet ist und zur Zeit $t_0 = 0$ den Ort $r = r_0$ passiert, bis zum Schwarzschildradius $r = 2M$. Vergleichen Sie mit der Eigenzeit des fallenden Teilchens und der Zeit, die das Teilchen in einem Newtonschen Gravitationspotential bei gleicher Zentralmasse brauchen würde. (4 Pkt.)

(e) Bestimmen Sie die Eigenzeit eines Teilchens bis zum Erreichen von $r = 0$. (1 Pkt.)

17. Satellitenuhren (GPS) **9 Pkt.**

Die durch die Erdgravitation erzeugte Metrik wird (außerhalb der Erdkugel) in guter Näherung durch das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + 2\Phi)\, c^2\mathrm{d}t^2 - (1 - 2\Phi)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

beschrieben, wobei $\Phi = -GM/rc^2$ ($|\Phi| \ll 1$)[3] das mit dem Faktor $1/c^2$ entdimensionalisierte newtonsche Gravitationspotential ist.

(a) Berechnen Sie die Zeit τ, die auf einer Uhr (mit festen Winkelkoordinaten) im Abstand R vom Erdmittelpunkt verstreicht, als Funktion der Koordinatenzeit t [$\tau(0) = 0$]. Laufen Uhren schneller oder langsamer, wenn R zunimmt? (2 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ für einen Satelliten auf einer Kreisbahn (mit Radius R) über dem Äquator ($\vartheta = \pi/2$). (5 Pkt.)

Hinweis: Die Lagrangefunktion $L = {}^1\!/_2\,(\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau)^2$ liefert zwei zyklische Koordinaten, die Kreisbahnbedingung $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau = 0$ führt darüber hinaus zu $\partial L/\partial r = 0$. Mit $L = {}^1\!/_2\,c^2$ kann man die Integrationskonstanten als Funktion des Kreisbahnradius bestimmen. Zwischenergebnis zur Kontrolle: $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = \pm c\sqrt{|\Phi|}/R + \mathcal{O}\left(|\Phi|^{3/2}\right)$.

(c) Wie lange braucht ein Satellit auf einer Kreisbahn mit 20183 km Höhe (Erdradius $R_E =$ 6370 km) für einen Umlauf (Eigenzeit)? Geben Sie die Differenz zur Eigenzeit einer am Pol auf der Erdoberfläche positionierten Uhr in Mikrosekunden an. (2 Pkt.)

Hinweis: Die Erdabplattung darf vernachlässigt werden.
Zahlenwerte: $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$, $c = 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$, Erdmasse $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

Hier ein paar Zusatzaufgaben zur weiteren Vertiefung der Vorlesung.

[3] Gleichungen können also in Φ linearisiert/entwickelt werden, wo immer das sinnvoll ist.