Teil A

1. Längenparadoxon **5 Pkt.**

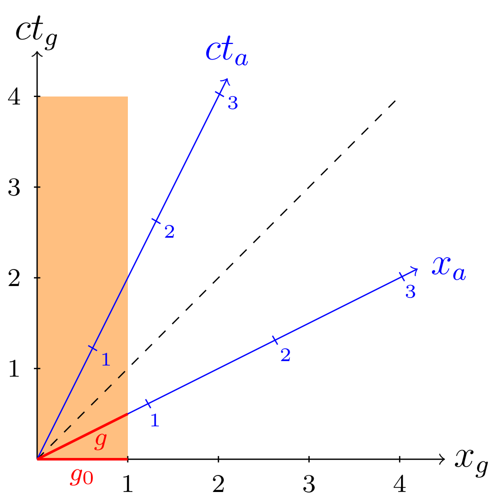
Aus der Längenkontraktion folgt, dass ein sehr schnell bewegtes Auto in eine viel zu kleine Garage passt. Zumindest aus der Sicht eines relativ zur Garage ruhenden Beobachters. Denn für den Fahrer des Autos hat sich die Länge des Autos nicht verändert, für ihn sind die Entfernungen verkürzt, die es zurückzulegen hat, insbesondere auch die Länge der Garage. Aus seiner Sicht passt das Auto also erst recht nicht in die Garage. Lösen Sie dieses Paradoxon auf.

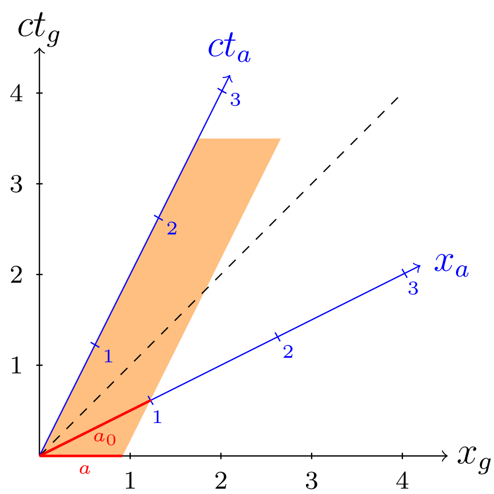
Hinweis: Denken Sie über Gleichzeitigkeit von Ereignissen nach. Machen Sie eine Skizze.

Lösung: Es sei Σ_a das Bezugssystem, in dem das Auto ruht und Σ_g das, in dem die Garage ruht.

$$\Sigma_a : \text{ Eigenlänge Auto } a_0$$
$$\Sigma_g : \text{ Eigenlänge Garage } g_0$$

Ein Beobachter in Σ_g misst die für das Auto die Länge $a = {}^{a_0}/_{\gamma} < a_0$ mit $\gamma = {}^1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} > 1$. Der Autofahrer misst in Σ_a seinerseits $g = \frac{g_0}{\gamma} < g_0$. Die folgenden Minkowski-Diagramme zeigen die Garagenlänge bzw. Autolänge aus der Sicht von beiden Bezugssystemen.



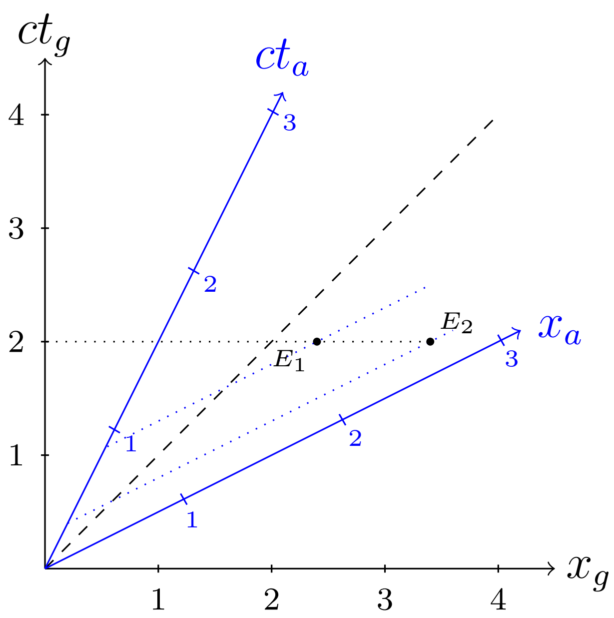


Ruhende Objekte haben zur Zeitachse parallele Weltlinien. Im zu dem Objekt bewegten System erscheint seine Länge kürzer als in seinem Ruhesystem.

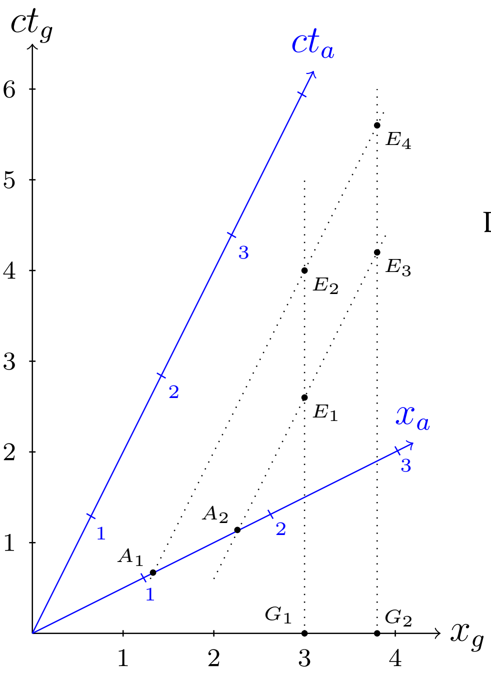
Laut Voraussetzungen ist $g_0 > a$. Das heißt aus der Sicht des relativ zur Garage ruhenden Beobachters passt das Auto in die Garage hinein. Für den Autofahrer ist dagegen $a_0 > g$. Für ihn passt das Auto nicht in die Garage. Dieses Paradoxon kann man lösen indem man über die Relativität der Gleichzeitigkeit nachdenkt. Das, was der Beobachter in Σ_g als gleichzeitig wahrnimmt, geschieht in Σ_a nicht gleichzeitig. Zur Veranschaulichung betrachte man den Fall, dass die Garagentore mittels Lichtsignalen geöffnet und geschlossen werden. Dazu befinde sich ein Sender in der Mitte der Garage. Die folgenden vier Punkte sollen bei der Erläuterung helfen:

- (A_1): Endpunkt Auto
- (A_2): Anfangspunkt Auto
- (G_1): Eingang Garage
- (G_2): Ausgang Garage

Für einen im Garagensystem Σ_g ruhenden Beobachter kommen die Lichtsignale gleichzeitig an G_1 und G_2 an. Ein Beobachter in Σ_a würde dagegen feststellen, dass das Lichtsignal zuerst G_2 erreicht (Garagentor bewegt sich auf ihn zu). Gleichzeitigkeit ist in der SRT nicht mehr absolut. Wann Ereignisse stattfinden hängt davon ab aus welchen Bezugssystem man jene betrachtet:



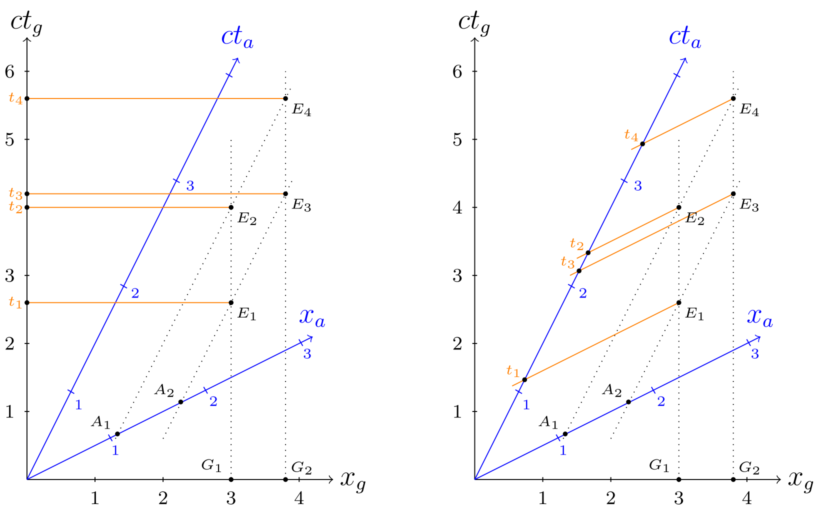
Die Ereignisse E_1 und E_2 sind im Garagensystem gleichzeitig (Verbindung ist parallel zu x_g-Achse). Im dazu bewegten Autosystem findet E_2 vor E_1 statt. Schaut man sich nun die Fahrt des Autos in die Garage an, sieht das im Minkowski Diagramm wie folgt aus.



Die Punkte E_1-E_4 beschreiben die Ereignisse:

- E_1: Autofront fährt in das Garagentor
- E_2: Autoheck passiert das Garagentor
- E_3: Autofront fährt durch die Garagenausfahrt
- E_4: Autoheck verlässt die Garage

Die Reihenfolge einiger dieser vier Ereignisse hängt davon ab, aus welchem Bezugssystem man den Vorgang betrachtet. (E_2 findet in *jedem* Bezugssystem *nach* E_1 statt, E_4 in jedem *nach* E_3, aber E_2 und E_3 liegen raumartig zueinander, ihre zeitliche Reihenfolge ist bezugssystemabhängig.)



Im Garagensystem finden findet E_2 vor E_3 statt. Für einen ruhenden Beobachter im Autosystem ist E_3 dagegen vor E_2. Damit befindet sich für den Garagenbeobachter das Auto zu einem Zeitpunkt vollständig in der Garage. Der Autobeobachter dagegen sieht, dass das Autovorderende die Garage schon wieder verlässt, wenn sich das Heck noch außerhalb der Garage befindet.

2. Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens **6 Pkt.**

Die Hamiltonfunktion eines freien Teilchen ist $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$. Substituieren Sie $H \rightarrow$

$H - q\phi$ und $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ (minimale Kopplung) wobei $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ die elektromagnetischen Potentiale darstellen. Zeigen Sie, dass die resultierende Hamiltonfunktion die Dynamik eines Teilchens mit Ladung q im externen elektromagnetischen Feld beschreibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}.$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$$

und die Beziehungen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}.$$

Lösung: Um ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld zu beschreiben, muss in man in der Hamiltonfunktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$ wie folgt substituieren: $H \to H - q\phi$ und $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}$:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad \to \quad \underbrace{H'(\mathbf{r}, \mathbf{p}') - q\phi}_{H} = \underbrace{\frac{(\mathbf{p}' - qA)^2}{2m}}_{p^2/2m} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\left[p_k'^2 - 2qp_k'A_k + q^2A_k^2\right] \tag{2.1}$$

Nun werden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für (2.1) ausgewertet:

$$-\frac{\partial H'}{\partial r_i} = -\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\left[-2qp_k'\frac{\partial A_k}{\partial r_i} + 2q^2A_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i}\right] - q\frac{\partial\phi}{\partial r_i} \stackrel{!}{=} \dot{p}_i' \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i'} = \frac{p_i' - qA_i}{m} \stackrel{!}{=} \dot{r}_i \tag{2.2b}$$

Umstellen von ∂_t(2.2b) ergibt

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_i' = \ddot{r}_i m + q\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right). \tag{2.3}$$

Nun wird (2.3) in (2.2a) eingesetzt

$$\ddot{r}_i m = -\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\left[-2qp_k'\frac{\partial A_k}{\partial r_i} + 2q^2A_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i}\right] - q\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k - q\left(\frac{\partial\phi}{\partial r_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right).$$

Der Term $\frac{\partial\phi}{\partial r_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}$ bestimmt die $i$te Komponente des elektrisches Feldes. Mit der Ersetzung $p_k' = m\dot{r}_k + qA_k$ aus (2.2b) folgt

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_i m &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3}\left[qm\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} + q^2A_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - q^2A_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - qm\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k\right] + qE_i \\
&= q\sum_{k=1}^{3}\left[\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k\right] + qE_i \\
&= q\left[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]_i + qE_i
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist am einfachsten durch Rückwärtsrechnen zu begründen. Das Kreuzprodukt kann mit dem total antisymmetrischen Einheitstensor ε_{jkm} (siehe B2) wie folgt ausgedrückt werden

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Dann ist

$$\begin{aligned}[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk} \dot{r}_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial r_l} A_m = \sum_{j,l,m} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, \dot{r}_j \frac{\partial A_m}{\partial r_l} \\ &= \sum_j \left[\dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \dot{r}_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right] = \sum_{k=1}^{3} \left[\dot{r}_k \frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \dot{r}_k \frac{\partial A_i}{\partial r_k} \right],\end{aligned}$$

wobei im letzten Ausdruck nur eine Umbenennung von j in k vorgenommen wurde. Mit $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ wird die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\,(\dot{r} \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E}.$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen. Die Besprechung erfolgt dann eine Woche später.

Teil B

1. **Photonenimpuls** **2 Pkt.**

Ein Photon habe denselben Impuls wie ein freies Elektron mit einer kinetischen Energie von 1 MeV. Welche Energie hat das Photon?

Lösung: Die Energie eines freien Elektrons ist die Summe seiner Ruhe- und Bewegungsenergie

$$E_e = T + E_0 = T + m_e c^2. \tag{1.1}$$

Nach Voraussetzung ist $T = 1$ MeV. Im relativistischen Fall gilt für einen Körper mit Ruhemasse m_0, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, für seine Energie und seinen Impuls

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Man bilde den Quotienten

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{pc^2}{E} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2 c^4}{E^2 c^2}}}$$

und stelle nach E um. Man erhält die sogenannte Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2\left(1-\frac{p^2c^2}{E^2}\right)=m_0^2c^4 \quad \Rightarrow \quad E^2=m_0^2c^4+p^2c^2. \tag{1.2}$$

Zusammen mit (1.1) und $E=E_e$ gewinnt man

$$\begin{aligned}\left(T+m_0c^2\right)^2 &= m_0^2c^4+p^2c^2\\ T^2+2Tm_0c^2+m_0^2c^4 &= m_0^2c^4+p^2c^2\\ \frac{T^2}{c^2}+2Tm_0 &= p^2.\end{aligned}$$

Für das Elektron ist $m_0=m_e$ und der Elektronenimpuls ist dann $p_e=\sqrt{\frac{T^2}{c^2}+2Tm_e}$. Für ein masseloses Photon ist $m_0=0$ und es gilt mit (1.2) $E=pc$. Die Energie des Photons beträgt also

$$E=p_e\cdot c=\sqrt{T^2+2Tm_ec^2}=2,2787\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}=1,422\,\mathrm{MeV}.$$

Anmerkung: Die Energie des Photons ist offensichtlich größer als die kinetische Energie des Elektrons aber kleiner als seine Gesamtenergie:

$$T<\sqrt{T^2+2Tm_ec^2}=\sqrt{\left(T+m_ec^2\right)^2-m_e^2c^4}=\sqrt{E_e^2-m_e^2c^4}<E_e\,.$$

2. Eigenschaften der Pauli-Matrizen **5 Pkt.**

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Verifizieren Sie

$$\sigma^j\sigma^k=\delta^{jk}\mathbb{1}+i\varepsilon_{jkm}\sigma^m$$

und zeigen Sie damit, dass für Kommutator und Antikommutator gilt

$$\begin{aligned}\left[\sigma^j,\sigma^k\right]_+ &= 2\delta^{jk}\mathbb{1}, \qquad j,k=1,2,3\\ \left[\sigma^j,\sigma^k\right]_- &= 2i\varepsilon_{jkm}\sigma^m.\end{aligned}$$

Dabei gilt die Einsteinsche Summenkonvention und ε_{jkm} ist der total antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe

$$\varepsilon_{jkm}=\begin{cases}1, & \text{falls } (j,k,m) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3)\\ -1, & \text{falls } (j,k,m) \text{ zyklische Permutation von } (2,1,3)\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

(Alternative Ausdrucksweise: $\varepsilon_{jkm}=1$, falls (j,k,m) eine gerade Permutation von $(1,2,3)$ ist, $\varepsilon_{jkm}=-1$, falls (j,k,m) eine ungerade Permutation von $(1,2,3)$ ist, und $\varepsilon_{jkm}=0$ sonst.)

Lösung: Wir berechnen zunächst alle möglichen Kombinationen von $\sigma^i\sigma^j$:

$$\left(\sigma^1\right)^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}\,, \tag{2.1}$$

$$\left(\sigma^2\right)^2 = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}\,, \tag{2.2}$$

$$\left(\sigma^3\right)^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}\,, \tag{2.3}$$

$$\sigma^1\sigma^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \mathrm{i}\sigma^3\,. \tag{2.4}$$

Linksmultiplikation von (2.4) mit σ^1 liefert

$$\underbrace{\left(\sigma^1\right)^2}_{\mathbb{1}}\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^1\sigma^3 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^1\sigma^3 = -\mathrm{i}\sigma^2\,, \tag{2.5}$$

Rechtsmultiplikation mit σ^2 führt zu:

$$\sigma^1\underbrace{\left(\sigma^2\right)^2}_{\mathbb{1}} = \mathrm{i}\sigma^3\sigma^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^3\sigma^2 = -\mathrm{i}\sigma^1\,, \tag{2.6}$$

Durch Bilden der Adjungierten der Gleichungen (2.4), (2.5), (2.6) erhalten wir schließlich (die σ_i sind hermitesch):

$$\sigma^2\sigma^1 = -\mathrm{i}\sigma^3\,, \tag{2.7}$$

$$\sigma^3\sigma^1 = \mathrm{i}\sigma^2\,, \tag{2.8}$$

$$\sigma^2\sigma^3 = \mathrm{i}\sigma^1\,, \tag{2.9}$$

womit alle neun Produkte berechnet sind. Unabhängig sind nur die Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.4), denn $\left(\sigma^3\right)^2$ lässt sich durch Multiplikation von (2.4) mit der adjungierten Gleichung (2.7) unter Verwendung von (2.1) und (2.2) gewinnen. Diese Ergebnisse lassen sich kompakt mit Hilfe des vollständig antisymmetrischen Tensors dritter Stufe ε_{ijk} ausdrücken:

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma^k \tag{2.10}$$

Für die (verallgemeinerten) Kommutatoren erhält man dann

$$\begin{aligned}\left[\sigma^j,\sigma^k\right]_+ &= \sigma^j\sigma^k + \sigma^k\sigma^j = \delta^{jk}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m + \delta^{kj}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{kjm}\sigma^m = \delta^{jk}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m + \delta^{jk}\mathbb{1} - \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m\\ &= 2\delta^{jk}\mathbb{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sigma^j,\sigma^k\right]_- &= \sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j = \delta^{jk}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m - \delta^{kj}\mathbb{1} - \mathrm{i}\varepsilon_{kjm}\sigma^m = \delta^{jk}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m - \delta^{jk}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m\\ &= 2\mathrm{i}\varepsilon_{jkm}\sigma^m\end{aligned}$$

Im Teil B können **7 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.