13. Wissens- und Verständnisfragen **36 Pkt.**

(a) Für ein freies Teilchen kann man eine relativistische Schrödingergleichung in der Form (3 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi} = H\psi\,, \qquad H = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}$$

aufstellen. Geben Sie zwei Gründe an, warum diese Beschreibung unbefriedigend ist.

(b) Warum führt auch die Klein-Gordon-Gleichung (2 Pkt.)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

nicht zu einer zufriedenstellenden Beschreibung freier relativistischer Elektronen? (Interpretation der Wellenfunktion?)

(c) Sind alle Lösungen der Dirac-Gleichung (1 Pkt.)

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\rho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}\right) - \rho_3 mc^2\right)\psi = 0$$

auch Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung?

(d) Sind parallele Komponenten von Impuls und Drehimpuls für ein Teilchen gleichzeitig scharf messbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkt.)

(e) Welche der Größen Geschwindigkeit, Impuls und Bahndrehimpuls eines *freien* Teilchens sind in der Dirac-Theorie *keine* Erhaltungsgrößen? Wieso legt die Antwort auf diese Frage die Existenz des Spins nahe? Mit welcher Erhaltungsgröße ist dieser verknüpft? (4 Pkt.)

(f) Aus welchen zwei Termen setzt sich der Gesamtdrehimpuls des Elektrons gemäß der Diracgleichung zusammen? (Formel und Benennung) (1 Pkt.)

(g) Was versteht man unter Zitterbewegung? (2 Pkt.)

(h) Warum stellen die Lösungen negativer Energie der Dirac-Gleichung ein Problem dar? Skizzieren Sie, mit welchen Ideen Dirac es löste. Welches Teilchen konnte er so vorhersagen und wie sehen die Kenngrößen dieses Teilchens (Ladung, Masse, Energie) aus? Wieso gerät man mit dieser Interpretation an die Grenzen der Möglichkeiten der Dirac-Gleichung? (5 Pkt.)

(i) Was versteht man unter dem kleinschen Paradoxon? Wie kann man es erklären? (2 Pkt.)

(j) Welchen Wert sagt die Dirac-Gleichung für den gyromagnetischen Faktor des Elektrons voraus? (1 Pkt.)

(k) In schwach relativistischer Näherung lässt sich die Dirac-Gleichung mit äußerem elektrischem Feld auf eine Schrödinger-Gleichung der folgenden Form zurückführen: (3 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi} = \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}\right) - \frac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\mathrm{div}\boldsymbol{E}\right)\psi\,.$$

wobei Φ das externe Potential und $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ das elektrische Feld ist. Geben Sie für zwei der Terme drei bis fünf des Hamiltonoperators eine physikalische Interpretation.

(l) Welche Quantenzahlen sind für die Kennzeichnung der Energieeigenwerte des relativistischen Wasserstoffproblems notwendig? Welche Entartung ist also aufgehoben? Welchen quantenfeldtheoretischen Effekt, der zu einer zusätzlichen Aufspaltung von Energieniveaus führt, erfasst die Dirac-Gleichung nicht? (3 Pkt.)

(m) Bei der Quantisierung der schwingenden Saite erhält man für die geeignet normierten komplexen Amplituden der Eigenschwingungen Operatoren. Welche Kommutator-Relationen erfüllen diese? (Nummerieren Sie die Eigenschwingungen mit ihrer Wellenzahl.) (2 Pkt.)

(n) Wie lauten die Kommutatorrelationen für die mit dem Vektorpotential verknüpften Feldoperatoren bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in Coulomb-Eichung? Welche Nebenbedingung führt zur Abweichung von den üblichen Quantisierungsregeln? (3 Pkt.)

(o) Was versteht man unter zweiter Quantisierung? Wodurch unterscheidet sich die zweite Quantisierung bosonischer und fermionischer Felder? (2 Pkt.)

Lösung:

(a) (Nur zwei der folgenden Antworten werden erwartet.)

i) Die Wurzelfunktion ist für Operatoren vieldeutig.

ii) Zeitableitungen und Ortsableitungen treten nicht in der aufgrund der relativistischen Invarianz zu fordernden symmetrischen Form auf.

iii) Die Gleichung ist nicht vernünftig auf den Fall der Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes zu verallgemeinern. (Das heißt, wenn man die Verallgemeinerung gemäß der Standardmethode – minimale Substitution – versucht, dann ergibt sich eine Gleichung, die ein Teilchen im elektromagnetischen Feld nicht richtig beschreibt.)

(b) Die Klein-Gordon-Gleichung lässt sich in eine Kontinuitätsgleichung umformulieren. Die zugehörige „Wahrscheinlichkeitsdichte" nimmt aber Werte mit beiden Vorzeichen an. $|\psi|^2$ kann nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, weil damit keine Kontinuitätsgleichung verknüpft ist.

(c) Ja.

(d) Ja. Legen wir das Koordinatensystem so, dass der Impuls in z-Richtung weist. Die Drehimpulskomponente $L_z = xp_y - yp_x$ setzt sich dann nur aus Operatoren zusammen, die mit p_z vertauschen (d.h., sie enthält nicht die z-Komponente des Ortsoperators).

(e) Geschwindigkeit und Bahndrehimpuls sind keine Erhaltungsgrößen (der Impuls ist eine, aber das war nicht gefragt...)

Dass der Bahndrehimpuls keine Erhaltungsgröße ist, legt nahe, dass er nicht den *gesamten* Drehimpuls darstellt, denn von dem würden wir natürlich erwarten, dass er erhalten ist. Die Differenz zwischen dem Gesamtdrehimpuls und dem Bahndrehimpuls ist der Spin.

Die Existenz des Spins ist also mit der Existenz einer Erhaltungsgröße Gesamtdrehimpuls eng verknüpft.

(f) $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$

Dabei ist $\boldsymbol{L}$ der Bahndrehimpuls und $\boldsymbol{S}$ der Spin.

(g) Eine ideale Messung einer Geschwindigkeitskomponente liefert nach der Dirac-Gleichung immer den Wert $+c$ oder $-c$. Da Geschwindigkeitsmessungen in der Praxis Werte zwischen diesen beiden Extremen liefern, muss die Elektronengeschwindigkeit zwischen ihnen hin und her oszillieren oder „zittern“, und zwar mit hoher Frequenz. (Auch der Ort eines freien Teilchens hat eine oszillatorische Komponente.)

(h) Ein Problem stellen die Lösungen negativer Energie dar, weil sie in der Dirac-Gleichung nicht einfach von denen positiver Energie entkoppeln. Es sind also Übergänge zwischen positiven und negativen Energien möglich, was ein Ignorieren der Lösungen mit negativen Energien (also ihre Verwerfung) nicht erlaubt. Lösungen positiver Energie sind instabil gegenüber dem Zerfall in solche negativer Energie, die Übergangswahrscheinlichkeit für einen solchen Prozess (unter Photonenabgabe) ist von null verschieden.

Dirac löst das Problem, indem er postuliert, dass der Vakuumzustand einer ist, in dem alle Einteilchenzustände negativer Energie mit Elektronen besetzt und alle positiver Energie leer sind. Fügt man nun ein Elektron mit positiver Energie hinzu, so kann es aufgrund des paulischen Ausschließungsprinzips nicht in einen Zustand negativer Energie übergehen.

Unbesetzte Zustände negativer Energie können vorkommen (z.B. kann durch Absorption eines hinreichend energiereichen Photons, eines γ-Quants, ein Elektron aus einem Zustand negativer Energie in einen positiver Energie angehoben werden), sie haben eine positive Energie, Masse und Ladung. Die Masse entspricht der von Elektronen, die Ladung der negativen Elektronenladung. Es handelt sich um Positronen (nicht Protonen, wie Dirac ursprünglich dachte).

Die Grenzen der Möglichkeiten der Dirac-Gleichung sind erreicht, weil man eine Einteilchengleichung (die Diracsche Wellenfunktion hängt nur von *einem* Satz raumzeitlicher Koordinaten ab, kann also nur ein einzelnes Teilchen darstellen) benützt, um Mehrteilchensysteme zu beschreiben (Elektronen-Positronen-Paare und ihre Vernichtung); das führt zwangsläufig zu quantitativen Fehlern; für eine exakte Beschreibung wird die Quantenelektrodynamik benötigt. (Generell kann man keine richtige relativistische Theorie aufstellen, die auf dem Ein-Teilchen-Niveau verbleibt.)

(i) Das kleinsche Paradoxon ist die Erscheinung, dass bei Reflexion von Teilchen (Elektronen) an einer genügend hohen Potentialstufe der Reflexionskoeffizient größer als eins werden kann. Dies passiert, wenn die Energie des einfallenden Teilchens um mehr als mc^2 unterhalb der Energie der (rechteckigen) Potentialstufe liegt. Erklären lässt sich das Phänomen mit der Freisetzung von Teilchen aus dem durch die Potentialstufe nach oben verschobenen Dirac-See (mit relativ zur Potentialbarriere negativer Energie).

(j) Die Dirac-Gleichung sagt $g = 2$ voraus.

(k) (Nur zwei Antworten erwartet.)

$-\dfrac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3c^2}$ – Korrektur der kinetischen Energie aufgrund der relativistischen Dispersionsrelation

$-\dfrac{q\hbar}{4m^2c^2}\sigma\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})$ – Spin-Bahn-Kopplung; $\boldsymbol{E} = -(\partial\Phi/\partial r)\,\boldsymbol{r}/r$ für ein radialsymmetrisches Potential
$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} \propto \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \quad (=\text{Bahndrehimpuls})$
allgemein: Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Magnetfeld, das im Ruhsystem des Elektrons aufgrund seiner Bewegung mit Impuls $\boldsymbol{p}$ durch das äußere elektrische Feld erzeugt wird ($\boldsymbol{p} = 0 \Rightarrow$ keine Wechselwirkungsenergie)

$-\dfrac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ – Darwin-Term
Folge der Zitterbewegung

(l) Die Energieeigenwerte $E_{n,j}$ des relativistischen Wasserstoffproblems hängen (wie die Notation nahelegt) von der Hauptquantenzahl n und der Drehimpulsquantenzahl j ab. Damit ist die l-Entartung oder zufällige Entartung des nichtrelativistischen Wasserstoffproblems aufgehoben, denn verschiedene l-Werte entsprechen in der Regel auch verschiedenen Werten von j. Nicht beschrieben wird durch die Dirac-Gleichung die zusätzliche Aufspaltung von Niveaus mit gleichem n und gleichem j durch die Lamb-Verschiebung (z.B. Aufspaltung der nach der Dirac-Gleichung entarteten Niveaus $2\mathrm{s}_{1/2}$ und $2\mathrm{p}_{1/2}$). Die Lamb-Verschiebung ist Folge von quantenelektrodynamischen Effekten (Wechselwirkung des Elektrons mit seinem eigenen elektromagnetischen Feld, Kopplung an Vakuumfluktuationen).

(m) Die komplexen Amplituden der Normalschwingungen werden, nach geeigneter Normierung, zu Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Normalschwingungsmoden. Seien b_k, $b^\dagger_{k'}$ der Vernichtungs- und Erzeugungsoperator für die Normalschwingung mit Wellenzahl k bzw. k', so gelten die Vertauschungsrelationen für Bosonen:

$$\left[b_k\,,\,b^\dagger_{k'}\right] = \delta_{kk'}\,, \qquad \left[b_k\,,\,b_{k'}\right] = \left[b^\dagger_k\,,\,b^\dagger_{k'}\right] = 0\,.$$

(n) $$\left[\pi^j(\boldsymbol{x}),A^l(\boldsymbol{x}')\right] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta^{tr}_{jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \qquad \left[A^j(\boldsymbol{x}),A^l(\boldsymbol{x}')\right] = \left[\pi^j(\boldsymbol{x}),\pi^l(\boldsymbol{x}')\right] = 0\,.$$

Hierbei sind die π^j die Komponenten des zu $\boldsymbol{A}$ kanonisch konjugierten Impulses (dessen klassische Variante dem klassischen Feld $\dot{\boldsymbol{A}}$ proportional ist) und

$$\delta^{tr}_{jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta_{jl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - \frac{1}{V_p}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_jk_l}{\boldsymbol{k}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$$

ist die transversale Delta-Funktion, die die Bedingung

$$\partial_l\delta^{tr}_{jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \partial'_l\delta^{tr}_{jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0$$

erfüllt.

In der üblichen Quantisierungsregel würde statt der transversalen Deltafunktion einfach $\delta_{jl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ stehen. Dann ist die durch die Coulomb-Eichung geforderte Nebenbedingung $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$ nicht erfüllt.

(o) Zweite Quantisierung ist die Behandlung der Schrödingergleichung im Rahmen des Formalismus der Feldquantisierung. Die Einteilchenwellenfunktion wird dabei wie ein klassisches Feld behandelt. Bosonische und fermionische Felder unterscheiden sich durch die bei der Quantisierung geforderten Kommutatorrelationen.

Bosonen: $[\,\Psi(\boldsymbol{x}), \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}')\,] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$,
$[\,\Psi(\boldsymbol{x}), \Psi(\boldsymbol{x}')\,] = 0, \qquad [\,\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}), \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}')\,] = 0$

Fermionen: $[\,\Psi(\boldsymbol{x}), \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}')\,]_+ = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$,
$[\,\Psi(\boldsymbol{x}), \Psi(\boldsymbol{x}')\,]_+ = 0, \qquad [\,\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}), \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}')\,]_+ = 0$

Auf diesem Blatt sind einige Wissensfragen gesammelt, die bei der Vorbereitung der mündlichen Prüfung helfen sollen.