Teil A

1. Längenparadoxon — 5 Pkt.

Aus der Längenkontraktion folgt, dass ein sehr schnell bewegtes Auto in eine viel zu kleine Garage passt. Zumindest aus der Sicht eines relativ zur Garage ruhenden Beobachters. Denn für den Fahrer des Autos hat sich die Länge des Autos nicht verändert, für ihn sind die Entfernungen verkürzt, die es zurückzulegen hat, insbesondere auch die Länge der Garage. Aus seiner Sicht passt das Auto also erst recht nicht in die Garage. Lösen Sie dieses Paradoxon auf.

Hinweis: Denken Sie über Gleichzeitigkeit von Ereignissen nach. Machen Sie eine Skizze.

2. Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens — 6 Pkt.

Die Hamiltonfunktion eines freien Teilchen ist $H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$. Substituieren Sie $H \to H - q\phi$ und $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ (minimale Kopplung) wobei $\phi(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ die elektromagnetischen Potentiale darstellen. Zeigen Sie, dass die resultierende Hamiltonfunktion die Dynamik eines Teilchens mit Ladung q im externen elektromagnetischen Feld beschreibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}.$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei die hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$$

und die Beziehungen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}.$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen. Die Besprechung erfolgt dann eine Woche später.

Teil B

1. Photonenimpuls — 2 Pkt.

Ein Photon habe denselben Impuls wie ein freies Elektron mit einer kinetischen Energie von 1 MeV. Welche Energie hat das Photon?

2. Eigenschaften der Pauli-Matrizen — 5 Pkt.

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifizieren Sie

$$\sigma^j \sigma^k = \delta^{jk}\mathbb{1} + i\varepsilon_{jkm}\sigma^m$$

und zeigen Sie damit, dass für Kommutator und Antikommutator gilt

$$\left[\sigma^j, \sigma^k\right]_+ = 2\delta^{jk}\mathbb{1}, \qquad j,k = 1,2,3$$
$$\left[\sigma^j, \sigma^k\right]_- = 2i\varepsilon_{jkm}\sigma^m.$$

Dabei gilt die Einsteinsche Summenkonvention und ε_{jkm} ist der total antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe

$$\varepsilon_{jkm} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (j,k,m) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1, & \text{falls } (j,k,m) \text{ zyklische Permutation von } (2,1,3) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Teil B können **7 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.