Teil A

3. Pauli-Matrizen **4 Pkt.**

In Aufgabe B2 wurden die Pauli-Matrizen definiert und gezeigt, dass gilt

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} \mathbb{1}_2 + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma^k, \tag{3.1}$$

Nun sollen weitere Eigenschaften der Pauli-Matrizen untersucht werden. Verifizieren Sie

(a) (2 Pkt.)

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,,$$

für zwei beliebige dreidimensionale Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit zahlenwertigen Komponenten. Weiterhin ist $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ ein Vektor mit den Pauli-Matrizen als operatorwertigen Komponenten.

(b) dass die Pauli-Matrizen vollständig sind, d.h. jede $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$-Matrix als Linearkombination der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2$ und der σ_i ausgedrückt werden kann. (2 Pkt.)

4. Kommutatoren mit Orts- und Impulsoperator (Wiederholung) **7 Pkt.**

(a) Ausgehend von der Vertauschungsrelation zwischen Orts- und Impulsoperator (2 Pkt.)

$$[\,\hat{x}, \hat{p}\,] = \mathrm{i}\hbar \tag{4.1}$$

zeige man durch vollständige Induktion, dass

$$[\,\hat{x}, \hat{p}^n\,] = \mathrm{i}\hbar n \hat{p}^{n-1} \tag{4.2a}$$

$$[\,\hat{p}, \hat{x}^n\,] = -\mathrm{i}\hbar n \hat{x}^{n-1} \tag{4.2b}$$

gilt.

(b) Für nach Potenzen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ entwickelbare Funktionen $F(\hat{x}, \hat{p})$ beweise man die Regeln (3 Pkt.)

$$[\,\hat{x}, F(\hat{x}, \hat{p})\,] = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{p}} \tag{4.3a}$$

$$[\,F(\hat{x}, \hat{p}), \hat{p}\,] = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}. \tag{4.3b}$$

Man mache sich klar, dass die beiden letzten Formeln nur bei genauer Interpretation der Ableitungen nützlich sind. Insbesondere gelten wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ die üblichen Formeln für die Potenzreihenentwicklung nicht.

(c) Verwenden Sie speziell die Formeln zur Berechnung des Kommutators $[\hat{p}, F(\hat{x}, \hat{p})]$ für die Operatorfunktionen $F(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{x}^4\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^4$ und $F(\hat{x}, \hat{p}) = 2\hat{x}^2\hat{p}^2\hat{x}^2$. (2 Pkt.)

5. Kontinuitätsgleichung **2 Pkt.**

Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

eine Gleichung der Form einer Kontinuitätsgleichung impliziert,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Dabei ist

$$\varrho = \frac{i\hbar}{mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

und

$$\mathbf{j} = \frac{-i\hbar}{m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

Warum kann ϱ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte gedeutet werden?

6. **Quadratwurzel des d'Alembert-Operators** **4 Pkt.**

Der d'Alembert-Operator $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ hat in Vierervektorschreibweise die Form

$$\Box = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 0,\ldots,3$$

wobei die kovarianten Ableitungen mit

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z}$$

und dementsprechend die kontravarianten mit

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

gegeben sind. Sie sind Elemente des Vierergradienten

$$\partial_i = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \quad \text{bzw.} \quad \partial^i = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad \text{wobei} \quad \partial_i = g_{ij}\partial^j, \quad \text{mit} \quad g = \mathrm{diag}(1, -\mathbb{1}_3).$$

Ziehen Sie die Quadratwurzel aus dem d'Alembert Operator $\Box$. Der resultierende Ausdruck soll linear in den Orts- und Zeitableitungen sein.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass mit noch unbekannten orts- und zeitunabhängigen Operatoren γ^i, die mit dem Impulsoperator vertauschen, gilt $\sqrt{\Box} = \gamma^i\partial_i$. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten γ^i erfüllen?

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

3. **Lösung der Klein-Gordon-Gleichung** **2 Pkt.**

Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung

$$-\hbar^2\partial_t^2\psi = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right)\psi$$

mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A\mathrm{e}^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}.$$

Wie lautet die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und wie steht diese in Verbindung zur Energie-Impuls-Beziehung?

4. Klein-Gordon Gleichung in schrödingerscher Form **6 Pkt.**

(a) Führen Sie die Klein-Gordon-Gleichung in ein gekoppeltes System zweier Differentialgleichungen über, die linear in der Zeit sind. Dazu diene der Ansatz: (2 Pkt.)

$$\psi = \phi + \chi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2(\phi - \chi).$$

(b) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho' = e\rho$ ausgedrückt durch ϕ und χ? (2 Pkt.)

(c) Zeigen Sie, daß das gekoppelte Gleichungssystem wie folgt geschrieben werden kann: (2 Pkt.)

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{H} \right) \mathbf{\Psi} = 0.$$

Dabei ist

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2$$

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.