Teil A

7. Clifford-Algebra **6 Pkt.**

Betrachtet werden vier hermitesche $(N \times N)$-Matrizen α^a, $(a = 1, \ldots, 4)$. Die Clifford-Algebra wird definiert mittels folgender Antivertauschungsregeln:

$$\alpha^a \alpha^b + \alpha^b \alpha^a = 2\delta_{ab}\,\mathbb{1}_N.$$

($\mathbb{1}_N$ ist die Einheitsmatrix der Dimension N. In vereinfachter Notation könnte man sie auch weglassen.)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen α^a linear unabhängig sind (also dass das Verschwinden einer Linearkombination $\sum_a c_a \alpha^a$ impliziert, dass alle c_a null sind). (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass die Dimension N der antikommutierenden Matrizen α^a gerade sein muss. Warum muss $N = 2$ ebenfalls ausgeschlossen werden? (2 Pkt.)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Eigenwerte der Matrizen gleich ± 1 sein müssen. Zeigen Sie weiterhin, dass die Spur verschwinden muss, $\operatorname{Tr} \alpha^a = 0$.

(c) Verifizieren Sie explizit, dass folgende vierdimensionale Darstellung die Antivertauschungsregeln erfüllt: (2 Pkt.)

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3, \qquad \alpha^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

mit den Paulimatrizen σ^i.

8. Levy-Leblond-Linearisierung der Schrödinger-Gleichung **8 Pkt.**

Die Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \right) \psi = 0,$$

ist unsymmetrisch in bezug auf die Ordnung der Zeit- und Raumableitungen. Mit dem Ansatz:

$$(i\hbar a \partial_t - i\hbar b^k \partial_{x^k} + c)\psi = 0\,,$$

der in den Raumableitungen linear ist, lässt sich diese Asymmetrie beseitigen. Die Koeffizienten a, b^1, b^2, b^3, c sind hierbei quadratische Matrizen und ψ dementsprechend ein Spaltenvektor. Man fordert, dass die Lösungen der linearen Wellengleichung zugleich Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind.

(a) Sollen beide Gleichungen simultan gelten, dann muss es einen Operator der Form (2 Pkt.)

$$i\hbar\tilde{a}\partial_t - i\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c}$$

geben, der die lineare Wellengleichung wieder in die Schrödinger-Gleichung überführt:

$$(i\hbar\tilde{a}\partial_t - i\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c})(i\hbar a\partial_t - i\hbar b^k\partial_{x^k} + c) = 2m\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \right).$$

Der (willkürliche) Faktor $2m$ wird sich als zweckmäßig erweisen. Zeigen Sie durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \tilde{a}a &= 0 & \tilde{a}b^k + \tilde{b}^k a &= 0 \\ \tilde{a}c + \tilde{c}a &= 2m & \tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k &= -2\delta_{kl} \qquad k,l = 1,2,3 \\ \tilde{c}c &= 0 & \tilde{c}b^k + \tilde{b}^k c &= 0 \end{aligned}$$

(b) Sei d eine invertierbare Matrix ($dd^{-1} = 1$) und die α^μ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ definiert mittels: (2 Pkt.)

$$\mathrm{i}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right) = d\alpha^4 \qquad \mathrm{i}\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right) = -\alpha^4 d^{-1}$$
$$b^k = d\alpha^k \qquad \tilde{b}^k = -\alpha^k d^{-1}$$

Zeigen Sie, dass die Matrizen α^μ die Antivertauschungsregeln der Clifford-Algebra (siehe Aufgabe *Clifford-Algebra*) erfüllen.

(c) Wählen Sie (2 Pkt.)

$$d = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit der Darstellung der Matrizen α^μ aus der Aufgabe *Clifford-Algebra* einen gültigen Satz von Koeffizienten $a, \tilde{a}, b^k, \tilde{b},^k c$ und $\tilde{c}$.

Hinweis: Eindeutige Lösungen erhält man etwa, wenn man ansetzt

$$a - \frac{1}{2m}\,c = -\mathrm{i}d\,, \quad \tilde{a} - \frac{1}{2m}\,\tilde{c} = -\mathrm{i}d^{-1} \quad \text{oder} \quad a - \frac{1}{2m}\,c = \mathrm{i}d\,, \quad \tilde{a} - \frac{1}{2m}\,\tilde{c} = \mathrm{i}d^{-1}\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass mit dieser Konstruktion der Koeffizienten-Matrizen die Komponenten des Vierer-Spinors $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ die Schrödinger-Gleichung erfüllen. (2 Pkt.)

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

5. Vierer-Stromdichte aus Dirac-Gleichung **6 Pkt.**

Wir betrachten eine Lösung der freien Dirac-Gleichung mit positiver Energie E und $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$

$$\psi(z,t) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_z z)}.$$

Hierbei ist N ein geeigneter Normierungsfaktor. Bestimmen Sie die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\boldsymbol{j} = (j^\mu) = c\left(\psi^\dagger \alpha^\mu \psi\right)$, $\mu = 1, 2, 3$.

Hinweis: Die α^μ sind gegeben durch $\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$, wobei σ^μ die Paulimatrizen sind.

6. Lösungen Klein-Gordon- versus Dirac-Gleichung **4 Pkt.**

Im feldfreien Fall ist jede Lösung der Dirac-Gleichung auch Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Im Teil B können **10 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.