Teil A

9. Infinitesimale Drehung im Minkowski-Raum **4 Pkt.**

Zeigen Sie, dass die $N-$fache Anwendung der infinitesimalen Drehung im Minkowski-Raum

$$\Lambda = \mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} J = \mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

im Limes $N \to \infty$ auf eine Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel φ führt.

Hinweis: Es bietet sich an mit der Definitionsgleichung für die Exponentialfunktion

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

zu arbeiten. Dabei nutzt man aus, dass für eine $m-$dimensionale diagonale Matrix T mit den Diagonalelementen t_i, $i = 1, \ldots, m$

$$e^T = \mathrm{diag}\left(e^{t_i}\right)$$

gilt.

10. Kleinsches Paradoxon **10 Pkt.**

Betrachten Sie die Dirac-Gleichung

$$\left(E - e\Phi(z)\right)\psi = \left(c\alpha^3 p_z + \alpha^m mc^2\right)\psi$$

für ein Stufenpotential der Form

$$e\Phi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ v & z \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Nehmen Sie an, dass von links eine ebene Welle mit *positiver* Energie einfalle und verifizieren Sie folgende Form der Lösung: (4 Pkt.)

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_{\text{ein}} + \psi_{\text{refl}} & z < 0 \\ \psi_{\text{trans}} & z \geq 0 \end{cases}$$

mit

$$\psi_{\text{ein}} = ae^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_{\text{refl}} = be^{-ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + b' e^{-ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda = \dfrac{c\hbar k}{E + mc^2}$, $k = \dfrac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c}$ und

$$\psi_{\text{trans}} = de^{ik_v z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda_v \\ 0 \end{pmatrix} + d' e^{ik_v z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\lambda_v \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_v = \dfrac{c\hbar k_v}{E - v + mc^2}$, $k_v = \dfrac{\sqrt{(E-v)^2 - m^2c^4}}{\hbar c}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Stetigkeit von ψ an der Schwelle impliziert: (2 Pkt.)

$$a + b = d\,, \quad a - b = \varrho d\,, \quad b' = d' = 0\,, \quad \text{wobei} \quad \varrho = \frac{k_v}{k}\frac{E + mc^2}{E - v + mc^2}\,.$$

(c) Bestimmen Sie die durchgehende, j_{trans}, und die reflektierte Stromdichte, j_{refl}, im Verhältnis zur einfallenden Stromdichte j_{ein}. Zeigen Sie, dass für $v > E + mc^2$ folgt: (4 Pkt.)

$$j_{\mathrm{trans}} < 0, \quad \frac{j_{\mathrm{refl}}}{j_{\mathrm{ein}}} > 1 \qquad \text{(kleinsches Paradoxon).}$$

Nutzen Sie dazu die in der Vorlesung definierte Viererstromdichte $j^\mu = c\psi^\dagger \alpha^\mu \psi$.

Hinweis: Da es hier um Verhältnisse geht, ist für j_{ein} und j_{refl} das gleiche Vorzeichen zu wählen, wenn sie einander entgegen gerichtet sind.

$$\left[\text{Lösung}: \quad T = \frac{j_{\mathrm{trans}}}{j_{\mathrm{ein}}} = \frac{4\varrho}{|1+\varrho|^2}\,, \qquad R = \frac{j_{\mathrm{refl}}}{j_{\mathrm{ein}}} = \left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right|^2\right]$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

7. Levy-Leblond-Linearisierung und intrinsisches magnetisches Moment **8 Pkt.**

In der Aufgabe *Levy-Leblond-Linearisierung der Schrödinger-Gleichung* wurde gezeigt, dass der Differentialoperator der Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens sich gemäß

$$2m\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right) = \left(\mathrm{i}\hbar\tilde{a}\partial_t - \mathrm{i}\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c}\right)\left(\mathrm{i}\hbar a\partial_t - \mathrm{i}\hbar b^k\partial_{x^k} + \bar{c}\right)$$

faktorisieren lässt, wobei die rechts auftretenden Operatoren die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{a}a &= 0 & \tilde{a}b^k + \tilde{b}^k a &= 0 & \\ \tilde{a}\bar{c} + \tilde{c}a &= 2m & \tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k &= -2\delta_{kl} \qquad & k,l = 1\ldots 3 \\ \tilde{c}\bar{c} &= 0 & \tilde{c}b^k + \tilde{b}^k\bar{c} &= 0 & \end{aligned}$$

erfüllen. (Wir haben c in $\bar{c}$ umbenannt, um Konflikte mit der Benennung der Lichtgeschwindigkeit zu vermeiden.) Außerdem wurde gezeigt, dass eine Darstellung dieser Operatoren durch

$$a = \tilde{a} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^k = -\tilde{b}^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \qquad \bar{c} = \tilde{c} = 2m\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Alle Lösungen der linearisierten Gleichung

$$\left(\mathrm{i}\hbar a\partial_t - \mathrm{i}\hbar b^k\partial_{x^k} + \bar{c}\right)\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{7.1}$$

sind auch Lösungen der Schrödinger-Gleichung

$$\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0\,. \tag{7.2}$$

Führen wir nun auf die übliche Weise elektromagnetische Felder ein, nämlich durch die Ersetzung

$$p_\mu = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\frac{\hbar}{c}\,\partial_t \\ -\mathrm{i}\hbar\nabla \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_0 - \frac{q}{c}A_0 \\ p_k - \frac{q}{c}A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\frac{\hbar}{c}\,\partial_t - \frac{q}{c}A_0 \\ -\mathrm{i}\hbar\nabla - \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}\,,$$

wobei $(A_0, \boldsymbol{A})^T = (\Phi, \boldsymbol{A})^T$ das elektromagnetische Viererpotential ist, so sind die aus der Levy-Leblond-Gleichung (7.1) und die aus der Schrödinger-Gleichung (7.2) entstehenden Gleichungen nicht mehr äquivalent.

Die aus (7.1) entstehende Gleichung lässt sich aber durch Linksmultiplikation mit einem geeigneten Operator wieder auf die Form einer Schrödinger-Gleichung bringen. Führen Sie dieses Programm durch und diskutieren Sie die gegenüber der aus (7.2) entstehenden Schrödinger-Gleichung auftretenden Zusatzterme. Zeigen Sie, dass einer dieser Terme die Energie eines intrinsischen magnetischen Moments beschreibt und bestimmen Sie den zugehörigen *gyromagnetischen Faktor*. Dazu müssen Sie sich zuerst klarmachen, dass der neue Freiheitsgrad des Systems (von der Form $\lambda\sigma^k$) ein Teilchen mit Spin $1/2$ beschreibt (etwa durch Vergleich mit Drehimpulsvertauschungsrelationen).

Hinweis: Der gyromagnetische Faktor g, auch Landé-Faktor genannt, steht mit dem gyromagnetischen Verhältnis γ im folgenden Zusammenhang

$$\gamma = g\frac{q}{2mc}.$$

Das gyromagnetische Verhältnis beschreibt das Verhältnis zwischen einem Drehimpuls und dem mit ihm verknüpften magnetischen Moment.

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.