Teil A

11. Nichtrelativistischer Grenzfall der Dirac-Gleichung und schwach relativistische Korrekturen **16 Pkt.**

Im nichtrelativistichen Fall ist mc^2 die größte Energie des Problems. Das motiviert den Ansatz

$$\psi = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$

mit Funktionen φ und χ, die nur *schwach* von der Zeit abhängen.

(a) Benützen Sie diesen Ansatz, um aus der Dirac-Gleichung (2 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p}-{}^{q}/_{c}\boldsymbol{A}\right)\chi\\ \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p}-{}^{q}/_{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi\end{pmatrix} + q\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix} \tag{11.1}$$

abzuleiten. Zeigen Sie, dass in niedrigster Ordnung in Potenzen von $1/c$ gilt

$$\chi = \frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi\,. \tag{11.2}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Terme in der zweiten Zeile von Gl. (11.1) die beiden größten sind. Alle anderen kann man in erster Näherung weglassen.

(b) Leiten Sie mithilfe dieses Ergebnisses die *Pauli-Gleichung* ab: (4 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{q\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B} + q\Phi\right)\varphi \tag{11.3}$$

(Warum ist diese bis zur Ordnung $1/c$ exakt?) Zeigen Sie, dass der landésche g-Faktor für den Spin $g = 2$ ist.
Hinweis: Setzen Sie $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}$ und formen Sie dann die Gleichung so um, dass der Bahndrehimpuls darin auftaucht.

(c) Zwecks Berechnung der nächsten relativistischen Korrekturen muss die zweite Gleichung in (11.1) durch Iteration etwas genauer gelöst werden. Dazu setzt man in der exakten Gleichung das Näherungsergebnis (11.2) in den ursprünglich vernachlässigten kleineren Termen ein und löst erneut nach χ auf. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $\boldsymbol{A} = 0$. Zeigen Sie, dass dafür aus der ersten Gleichung von (11.1) folgt: (3 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left\{\left(1-\frac{\boldsymbol{p}^2}{4m^2c^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+q\Phi\right) + \frac{q}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})\,\Phi\,(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})\right\}\varphi \equiv H'\varphi \tag{11.4}$$

Wieso erhält man auf diese Weise alle Korrekturen bis zur Ordnung $1/c^2$?

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho = \|\varphi\|^2 + \|\chi\|^2$ bis zur Ordnung $1/c^2$. (Ergebnis: $\rho = \|\varphi\|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\|(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla})\,\varphi\|^2$.) Um im Schrödingerbild voranzukommen, benötigen wir eine neue Wellenfunktion φ_s, so dass gilt $\langle\varphi_s\,|\,\varphi_s\rangle = \int\varrho\,\mathrm{d}^3x$. Zeigen Sie, dass dies erreicht wird durch: (3 Pkt.)

$$\varphi_s = \left(1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi$$

(e) Verifizieren Sie, dass gilt (4 Pkt.)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi_s = H\varphi_s \quad \text{mit} \quad H = \left(1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{8m^2c^2}\right)H'\left(1-\frac{\boldsymbol{p}^2}{8m^2c^2}\right) \tag{11.5}$$

und zeigen Sie

$$\begin{aligned} H &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + q\Phi + \tilde{H} \\ \tilde{H} &= \underbrace{-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3c^2}}_{\text{Dispersionsterm}} \underbrace{-\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}\right)}_{\text{Spin-Bahn-Term}} \underbrace{-\frac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla\cdot\boldsymbol{E}}_{\text{Darwin-Term}} \end{aligned} \tag{11.6}$$

Interpretieren Sie den Dispersionsterm und den Spin-Bahn-Term (für kugelsymmetrische Potentiale Φ).

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

8. Zwei-Spin-System **6 Pkt.**

Der Hamiltonoperator eines Systems aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen sei durch

$$H = \frac{a}{\hbar}\left(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}\right) + \frac{4b}{\hbar^2}\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)}$$

gegeben. Hierbei sind a und b positive, reelle Konstanten und $\boldsymbol{S}^{(1)}$ bzw. $\boldsymbol{S}^{(2)}$ sind die Spinoperatoren zum ersten Spin (1) bzw. zweiten Spin (2), d.h. Drehimpulsoperatoren zur Quantenzahl $l = 1/2$. Berechnen Sie die *Eigenwerte* von H und geben Sie die zugehörigen *Eigenvektoren* im Basissystem der Eigenzustände

$$|m_1 m_2\rangle \equiv |m\rangle^{(1)}|m\rangle^{(2)}$$

von $\left(\boldsymbol{S}^{(1)}\right)^2$, $\left(\boldsymbol{S}^{(2)}\right)^2$, $S_z^{(1)}$ und $S_z^{(2)}$ an. Für welches Verhältnis a/b tritt Entartung auf?

Hinweis: Eine Möglichkeit die Aufgabe lösen ist es, den Spinoperator als

$$\boldsymbol{S}^{(i)} = S_x^{(i)}\boldsymbol{e}_x + S_y^{(i)}\boldsymbol{e}_y + S_z^{(i)}\boldsymbol{e}_z$$

aufzufassen. Über die Darstellung des Spinoperators mit den Pauli-Matrizen kann man zunächst die Eigenzustände $|m\rangle^{(i)}$ von $S_z^{(i)}$ für ein System mit einem Spin bestimmen. Die Eigenzustände für das Zwei-Spin-System sind die Produktzustände $|m_1 m_2\rangle$. Die Matrixdarstellung von H wird dann über seine Wirkung auf $|m_1 m_2\rangle$ berechnet.

Alternativ kann man auch zum Gesamtspin $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}$ übergehen und ausrechnen, wie die gemeinsamen Eigenvektoren $|S, M\rangle$ von $\left(\boldsymbol{S}^{(1)}\right)^2$, $\left(\boldsymbol{S}^{(2)}\right)^2$, $\boldsymbol{S}^2$ und S_z im Basissystem der $|m_1 m_2\rangle$ aussehen.

Im Teil B können **6 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.