Teil A

12. Majorana-Fermionen **12 Pkt.**

Verschiedene Darstellungen der Dirac-Matrizen erlauben die Beschreibung von Fermionen mit unterschiedlichen Eigenschaften. In diesem Beispiel wird eine rein imaginäre Darstellung, eine sogenannte *Majorana-Darstellung* betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass eine unitäre Transformation ($U^\dagger = U^{-1}$) (1 Pkt.)

$$\gamma_M^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger \tag{12.1}$$

die Dirac-Matrizen wieder in Dirac-Matrizen überführt, d.h., dass auch die γ_M^μ die definierenden Antikommutator-Relationen erfüllen.

(b) Wie transformiert sich dabei die durch (3 Pkt.)

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu\,T} \tag{12.2}$$

definierte Ladungskonjugationsmatrix?
Hinweis: Sie sollten nicht einfach annehmen $C_M = UCU^\dagger$. Drücken Sie stattdessen die γ^μ-Terme in der Gleichung durch ihre Transformierten aus und versuchen Sie die Gleichung auf dieselbe Form zu bringen wie mit den untransformierten Dirac-Matrizen. Sie sollten dann $C_M = UCU^T$ als Transformationsgesetz für die Matrizen C und C^{-1} erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass bei einer Transformation mit (3 Pkt.)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0\left(\mathbb{1} + \gamma^2\right) \tag{12.3}$$

aus der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen die Darstellung

$$\begin{aligned}
\gamma_M^0 &= \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_M^1 &= \gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma_3 \end{pmatrix} \\
\gamma_M^2 &= -\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_M^3 &= \gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.4}$$

wird. Diese Darstellung ist rein imaginär, es gilt $\left(\gamma_M^\mu\right)^* = -\gamma_M^\mu$.

(d) Man zeige, dass mit dieser Darstellung die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen eine reelle Gleichung ist und dass mit ψ_M auch ψ_M^* Lösung ist. (1 Pkt.)

(e) Verifizieren Sie anhand von (12.2), dass $C = \gamma^2\gamma^0$ eine legitime Ladungskonjugationsmatrix ist. Bestimmen Sie die Ladungskonjugationsmatrix C_M in der neuen Darstellung unter Verwendung der in (b) abgeleiteten Formel. (3 Pkt.)

(f) Der adjungierte Spinor $\bar{\psi}$ ist definiert durch $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ (ist also nicht einfach der zum Spaltenvektor ψ adjungierte Zeilenvektor $\psi^\dagger$). Ferner ist der ladungskonjugierte Spinor durch $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ gegeben. Zeigen Sie, dass in der neuen Darstellung gilt: (1 Pkt.)

$$\psi_M^c = \eta_c\psi_M^*\,, \tag{12.5}$$

wobei η_c eine (irrelevante) Phase ist.

Es folgt, dass eine reelle Lösung ψ_M der Dirac-Gleichung in Majorana-Darstellung ihre eigene Ladungskonjugierte ist. Ein solches Majorana-Fermion ist damit sein eigenes Antiteilchen.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

9. Relativistische Eigenenergien des Wasserstoffatoms **7 Pkt.**

(a) Entwickeln Sie die Sommerfeldformel für die Berechnung der Energieeigenwerte des relativistischen Wasserstoffatoms (4 Pkt.)

$$E_{n,j} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_s}{n-\delta_j}\right)^2}}, \quad \delta_j = j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha_s^2}, \qquad \alpha_s \approx \frac{1}{137} \tag{9.1}$$

nach Taylor bis einschließlich der vierten Ordnung in der Feinstrukturkonstante α_s. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Näherung

$$E_{n,j} = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha_s^2}{2n^2} - \frac{\alpha_s^4}{2n^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \pm \dots\right)\right] \tag{9.2}$$

im Skript.

(b) Berechnen Sie die numerischen Werte (in eV) der relativistischen Korrektur zu den Eigenenergie des Wasserstoffatoms mit Hauptquantenzahlen $n = 1$ und $n = 2$. Verwenden Sie dabei die genäherte (9.2) sowie die exakte Lösung (9.1). Vergleichen Sie die numerischen Ergebnisse. (3 Pkt.)

Im Teil B können **7 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.