

13. Wissens- und Verständnisfragen

36 Pkt.

- (a) Für ein freies Teilchen kann man eine relativistische Schrödingergleichung in der Form (3 Pkt.)

$$i\hbar\psi = H\psi, \quad H = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}$$

aufstellen. Geben Sie zwei Gründe an, warum diese Beschreibung unbefriedigend ist.

- (b) Warum führt auch die Klein-Gordon-Gleichung (2 Pkt.)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

nicht zu einer zufriedenstellenden Beschreibung freier relativistischer Elektronen? (Interpretation der Wellenfunktion?)

- (c) Sind alle Lösungen der Dirac-Gleichung (1 Pkt.)

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) - \rho_3 mc^2 \right) \psi = 0$$

auch Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung?

- (d) Sind parallele Komponenten von Impuls und Drehimpuls für ein Teilchen gleichzeitig scharf messbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkt.)

- (e) Welche der Größen Geschwindigkeit, Impuls und Bahndrehimpuls eines *freien* Teilchens sind in der Dirac-Theorie *keine* Erhaltungsgrößen? Wieso legt die Antwort auf diese Frage die Existenz des Spins nahe? Mit welcher Erhaltungsgröße ist dieser verknüpft? (4 Pkt.)

- (f) Aus welchen zwei Termen setzt sich der Gesamtdrehimpuls des Elektrons gemäß der Diracgleichung zusammen? (Formel und Benennung) (1 Pkt.)

- (g) Was versteht man unter Zitterbewegung? (2 Pkt.)

- (h) Warum stellen die Lösungen negativer Energie der Dirac-Gleichung ein Problem dar? Skizzieren Sie, mit welchen Ideen Dirac es löste. Welches Teilchen konnte er so vorhersagen und wie sehen die Kenngrößen dieses Teilchens (Ladung, Masse, Energie) aus? Wieso gerät man mit dieser Interpretation an die Grenzen der Möglichkeiten der Dirac-Gleichung? (5 Pkt.)

- (i) Was versteht man unter dem kleinschen Paradoxon? Wie kann man es erklären? (2 Pkt.)

- (j) Welchen Wert sagt die Dirac-Gleichung für den gyromagnetischen Faktor des Elektrons voraus? (1 Pkt.)

- (k) In schwach relativistischer Näherung lässt sich die Dirac-Gleichung mit äußerem elektrischem Feld auf eine Schrödinger-Gleichung der folgenden Form zurückführen: (3 Pkt.)

$$i\hbar\psi = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{q\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{q\hbar^2}{8m^2c^2} \operatorname{div} \mathbf{E} \right) \psi.$$

wobei Φ das externe Potential und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ das elektrische Feld ist. Geben Sie für zwei der Terme drei bis fünf des Hamiltonoperators eine physikalische Interpretation.

- (l) Welche Quantenzahlen sind für die Kennzeichnung der Energieeigenwerte des relativistischen Wasserstoffproblems notwendig? Welche Entartung ist also aufgehoben? Welchen quantenfeldtheoretischen Effekt, der zu einer zusätzlichen Aufspaltung von Energieniveaus führt, erfasst die Dirac-Gleichung nicht? (3 Pkt.)

- (m) Bei der Quantisierung der schwingenden Saite erhält man für die geeignet normierten komplexen Amplituden der Eigenschwingungen Operatoren. Welche Kommutator-Relationen erfüllen diese? (Nummerieren Sie die Eigenschwingungen mit ihrer Wellenzahl.) (2 Pkt.)
- (n) Wie lauten die Kommutatorrelationen für die mit dem Vektorpotential verknüpften Feldoperatoren bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in Coulomb-Eichung? Welche Nebenbedingung führt zur Abweichung von den üblichen Quantisierungsregeln? (3 Pkt.)
- (o) Was versteht man unter zweiter Quantisierung? Wodurch unterscheidet sich die zweite Quantisierung bosonischer und fermionischer Felder? (2 Pkt.)

Auf diesem Blatt sind einige Wissensfragen gesammelt, die bei der Vorbereitung der mündlichen Prüfung helfen sollen.