1. **Taylorreihenentwicklung.** (3 Pkt.)
   Betrachten Sie das skalare Feld

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \text{ (Coulomb-Potenzial einer Punktladung)} \tag{1}$$

   Entwickeln Sie das Potential um die Stelle $\vec{r} = 0$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung: Wir betrachten das Taylorpolynom in der Form $\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k$. Betrachten Wir also die einzelnenϕ_k bis zu n=2, so ergibt sich:
k=0

$$\phi_0 = \phi(\vec{r} = 0) = \frac{\alpha}{r_0}$$

k=1:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \nabla\phi|_{\vec{r}=0}\,\vec{r} \\ &= \tfrac{\alpha}{r_0^3}\,(\vec{r}\cdot\vec{r}_0)\end{aligned}$$

k=2:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \tfrac{1}{2}\vec{r}^T H_\phi(\vec{r}=0)\vec{r} \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha\left[3\tfrac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{r_0^5} - \tfrac{r^2}{r_0^3}\right]\end{aligned}$$

wobei H_ϕ, die Hesse Matrix darstellt. Damit haben wir die Entwicklung bis zur 2. Ordnung gefunden:

$$\Phi\vec{r} = \alpha\left[\frac{1}{r_0} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{r_0^3} + \frac{1}{2}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}_0)^2 - r^2 r_0^2}{r_0^5}\right]$$

2. **Verifikation des Stokesschen Satzes.** (4 Pkt.)
   Verifizieren Sie den Stokesschen Satz für das Vektorfeld

$$\vec{V} = \left(\frac{4}{3}x - 2y\right)\vec{e}_x + (3y - x)\,\vec{e}_y$$

   und die Fläche

$$A = \left\{\vec{r} : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1, z = 0\right\}$$

Lösung: Zunächst berechnet man $\nabla \times \vec{V} = \left(\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y\right)\vec{e}_z = \vec{e}_z$. Die Fläche stellt eine Ellipse dar. Wir finden demnach die Parametrisierung :

$$\Phi = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r\cos(\phi) \\ \\ 2r\sin(\phi) \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Das Flächenelement $d\vec{A}$ erhalten wir aus:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) drd\phi \\ &= \left[\begin{pmatrix} 3\cos(\phi) \\ \\ 2\sin(\phi) \\ \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\sin(\phi) \\ \\ 2\cos(\phi) \\ \\ 0 \end{pmatrix}\right] drd\phi \\ &= 6r\vec{e}_z drd\phi \end{aligned}$$

Damit wird das Flächenintegral zu :

$$\int_A d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{V} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6r drd\phi = 6\pi$$

Um das Wegintegral bestimmen zu können bestimmen wir das differantial der Parametrisierung (2) mit r=1 (dem Rand):

$$d\vec{r} = \left(-3\sin(\phi)\vec{e}_x + 2\cos(\phi)\vec{e}_y\right) d\phi$$

Damit wird das Wegintegral zu :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_0^{2\pi} \left(12\sin^2(\phi) - 6\cos^2(\phi)\right) d\phi = 6\pi$$

Beide Integrale sind gleich. Damit haben wir den Stokesschen Satz in diesem speziellen Fall verifiziert.

3. **Dirac'sche δ-Funktion.** Zeigen Sie, dass sich die Dirac'sche δ- Funktion $\delta(x-a)$ als Grenz-

wert der Funktionenfolge

$$f_\eta(x-a) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\eta}\right) \tag{3}$$

für $\eta \to 0^+$ schreiben lässt.
Hinweis: zu zeigen ist

(a) $\delta(x-a) = 0\,, \forall x \neq a$ (1 Pkt.)

(b) $\int\limits_\alpha^\beta dx\delta(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \alpha < a < \beta, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ (2 Pkt.)

(c) Diskussion der Randpunkte (1 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) $x \neq a$:

$$\lim \eta \to 0^+ \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\eta}\right) = 0$$

(b) i)$\alpha < a < \beta$:

$$F_\eta(a) = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\eta}\right) dx$$

mit $y = \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi\eta}}$ folgt:

$$F_\eta(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sqrt{\eta}}}^{\frac{\beta-a}{\sqrt{\eta}}} \exp\left(-y^2\right) dy$$

Es folgt weiter:

$$\lim \eta \to 0^+ F_\eta(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy = 1.$$

ii)$a < \alpha < \beta$:

$\alpha - a = \tilde{\alpha} > 0; \beta - a = \tilde{\beta} > 0,$

$$F_\eta(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\eta}}}^{\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\eta}}} \exp\left(-y^2\right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy - \int\limits_{\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy \right)$$

$$\int\limits_{\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} dy e^{-y^2} < \int\limits_{\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} dy e^{-y^2} \cdot \frac{\sqrt{\eta} y}{\tilde{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\eta}}{2\tilde{\alpha}} \int\limits_{\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} dy \frac{d}{dy} e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\eta}}{2\tilde{\alpha}} e^{-\tilde{\alpha}^2/\eta} \underset{\eta \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Daraus folgt $\lim \eta \to 0^+ F_\eta(a) = 0$.

iii)$\alpha < \beta < a$:

$\alpha' = a - \alpha > 0$; $\beta' = a - \beta > 0$.

$$F_\eta(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-\alpha'}{\sqrt{\eta}}}^{\frac{-\beta'}{\sqrt{\eta}}} \exp\left(-y^2\right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{-\beta'}{\sqrt{\eta}}} \exp\left(-y^2\right) dy - \int_{-\infty}^{\frac{-\alpha'}{\sqrt{\eta}}} \exp\left(-y^2\right) dy \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{-\beta'}{\sqrt{\eta}}} dy e^{-y^2} < \int_{-\infty}^{\frac{-\beta'}{\sqrt{\eta}}} dy e^{-y^2} \cdot \frac{\sqrt{\eta} y}{-\beta'} = \frac{\sqrt{\eta}}{2\beta'} \int_{-\infty}^{\frac{-\beta'}{\sqrt{\eta}}} dy \frac{d}{dy} e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\eta}}{2\beta'} e^{-\beta'^2/\eta} \underset{\eta \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Daraus folgt $\lim \eta \to 0^+ F_\eta(a) = 0$.

Aus i),ii),iii) folgt:

$$\lim \eta \to 0^+ \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\eta}\right) dx = \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad \alpha < a < \beta, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(c) Diskussion der Randpunkte:
Aus a) folgt:

$$\int_\alpha^\beta dx \delta(x-a) = \frac{1}{2}, \text{ falls } \alpha = a \text{ oder } \beta = a.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 08. 04. 2009.