1. **Gesamtladung verschiedener Ladungsdichten.**

   (a) Der Raum zwischen 2 konzentrischen Kugeln mit dem Radius R_i und $R_a(R_i < R_< a)$ sei mit der Dichte (1 Pkt.)

   $$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2}, & \text{für } R_i < r_< R_a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   geladen. Berechnen Sie die Gesammtladung.

   (b) Berechnen Sie für die Ladungsverteilung (abgeschirmte Punktladung) (1 Pkt.)

   $$\rho(\vec{r}) = q\left[\delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right]$$

   die Gesamtladung Q.

   (c) Eine Hohlkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte (1 Pkt.)

   $$\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta\delta(r-R)$$

   Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a) Gesamtladung:

$$Q = \int d^3r\rho(\vec{r}) = \int_{R_i}^{R_a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha}{r^2}r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi\alpha\left(R_a - R_i\right)$$

(b) Gesamtladung:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r\rho(\vec{r}) = q - q\frac{\alpha^2}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= q - q\alpha^2\int_0^{\infty}r\mathrm{e}^{-\alpha r}\mathrm{d}r = q + q\alpha^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha r}\mathrm{d}r \\ &= q + q\alpha^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha r}\right)\Big|_0^{\infty} = q + q\alpha^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{\alpha} \\ &= q - q = 0 \end{aligned}$$

(c) Dipolmoment:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_0\cos\theta\delta(r-R)\vec{r}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \sigma_0 R^2\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\cos\theta R\left(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\right) \\ &= 2\pi\sigma_0 R^3\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\left(0,0,\cos^2\theta\right) = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 R^3\vec{e}_z \end{aligned}$$

2. **Feld eines Kreiszylinders.** Ein unendlich langer Kreiszylinder ist homogen geladen. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke und ihr Potential. (4 Pkt.)

Lösung: Wir wählen Zylinderkoordinaten(r, ϕ, z) und nutzen die Zylindersymmetrie des Problems aus:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(rho)\vec{e}_r$$

Für die Ladungsdichte soll gelten:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{, für } r \leq R \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Es sei Z_r: Zylinder der länge l, Zylinderachse : z- Achse , r: Radius. Mithilfe des physikalischen Gauß'schen Satzes folgt:

$$\int\limits_{S(Z_r)} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int\limits_{Z_r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r$$

Wir berechnen die einzelnen Beiträge seperat: Stirnfläche: $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{f} \to$ kein Beitrag zum Fluss, Mantelfläche: $\mathrm{d}\vec{f} = r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\vec{e}_r \to \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{f} = rE(r)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$

$$\int\limits_{S(Z_r)} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{f} = 2\pi l r E(r)$$

$r \geq R$:

$$\int\limits_{Z_r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \rho_0 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^l r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}z' = \rho_0 \pi R^2 l$$

$r \leq R$:

$$\int\limits_{Z_r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \rho_0 2\pi \int\limits_0^r \int\limits_0^l r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}z' = \rho_0 \pi r^2 l$$

Dies ergibt schließlich :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\vec{e}_r \begin{cases} \frac{1}{2} r, & \text{falls} r \leq R \\ \frac{1}{2}\frac{R^2}{r}, & = \text{falls} r \geq R \end{cases}$$

typisch ist die $1/r$-Abhängigkeit für $r \geq R$. Potenzial:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = E\vec{e}_r \to \Phi = \Phi(r)$$

innen:

$$\Phi(r) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0} r^2 + \Phi_0$$

außen:

$$\Phi(r) = -\frac{R^2\rho_0}{2\epsilon_9}\ln r + \Phi_1$$

Wahl des Bezugspunktes noch frei z.B.:

$$\Phi(r = R) := 0$$

Dann ist : $\Phi_0 = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}R^2$; $\quad \Phi_1 = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\ln R$
also bleibt:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), & \text{für} r \leq R\\ \ln\frac{R}{r}, & \text{für} R \leq e\end{cases}$$

3. **Randwertproblem.** Das Volumen (3 Pkt.)

$$V = \{\vec{r} = (x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq a, -\infty < z < +\infty\}$$

ist durch Metallplatten begrenzt. Die beiden Platten bei $y = 0$ und $y = a$ seien geerdet, während die Platte bei $x = 0$ isoliert von den beiden anderen Platten überall das konstante Potential ϕ_0 trägt. Wie lautet das Potential innerhalb von V?
Hinweis: Nutzen Sie die Translationssymmetrie des Problems und machen Sie den Produktansatz

$$\phi(x, y) = X(x)\, Y(y)\,.$$

Lösung: Da Translationssymmetrie in z-Richtung besteht kann das Potential nicht von z abhängen. Damit vereinfacht sich die Laplace-Gleichung zu:

$$\Delta\phi(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x, y) = 0.$$

Wir machen nun den gegebenen Ansatz $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ und teilen die gesamte Gleichung nochmals durch XY.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \alpha^2$$

Die einzige Möglichkeit die Gleichung zu erfüllen besteht nun darin, dass beide Seiten gleich einer Konstante sind die wir α^2 nennen. Damit zerfällt das Problem in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\phi(x, y) = e^{\pm\alpha x}e^{\pm i\alpha y}$$

Die Konstante α^2 wird dabei als positiv vorausgesetzt. Dies ist auf den ersten Blick nicht klar, aber es ist die einzige Möglichkeit später die Randbedingungen zu erfüllen. Nun schränken wir die allgemeine Lösung weiter ein. Wir verlangen, dass für $x \to \infty$

$\phi = 0$ gilt. Daraus folgt, dass bei dem x-Term nur das negative Vorzeichen möglich ist. Als nächstes fordern wir für $y = 0$ $\phi = 0$.

$$\phi(x,y) = e^{-\alpha x}(cos(\alpha y) + isin(\alpha y))$$

In dieser Darstellung sieht man, dass $\cos(\alpha y)$ nicht Teil der Lösung sein darf, da sonst $\phi(x,0) \neq 0$ wäre. Wir erhalten also:

$$\phi(x,y) = e^{-\alpha x} sin(\alpha y).$$

Aus der Randbedingung $\phi(x,a) = 0$ folgt dann:

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}$$

$$\phi(x,y) = e^{-\frac{n\pi}{a}x} sin(\frac{n\pi}{a}y), n = 1,2,3,...$$

Die allgemeine Lösung ist dann die Linearkombination aller Teillösungen:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} sin(\frac{n\pi}{a}y).$$

Um die Konstanten A_n zu bestimmen benutzen wir die letzte Randbedingung:

$$\phi(0,y) = \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\frac{n\pi}{a}y).$$

Die sich ergebende Gleichung ist gerade die Definition einer Sinus-Fourierreihe. Folglich errechnen sich die A_n nach:

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a \phi_0 \sin(\frac{n\pi}{a}y)dy$$

$$A_n = \frac{4\phi_0}{n\pi}\begin{cases} 1 & n\, ungerade \\ 0 & n\, gerade \end{cases}$$

Damit lautet das Endergebnis:

$$\phi(x,y) = \frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sin(\frac{(2n+1)\pi}{a}y)}{2n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)\pi}{a}x}.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **10 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 22. 04. 2009.