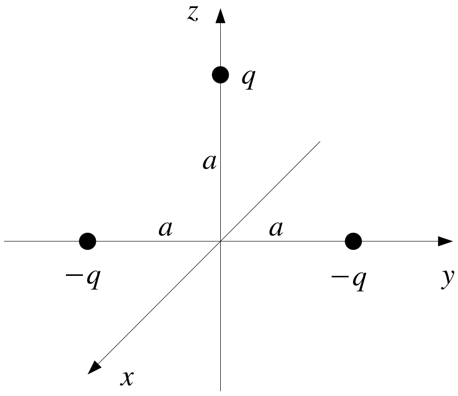

1. **Multipolentwicklung.** Drei Punktladungen sind, wie in nebenstehender Skizze, alle im Abstand a um den Koordinatenursprung angeordnet. Berechnen Sie eine Näherung für das Potential und das $\vec{E}$-Feld für weit entfernte Punkte. Drücken Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten aus und beziehen die beiden niedrigsten Terme der Multipolentwicklung mit ein. (4 Pkt.)

Lösung: Aus der Vorlesung ist die folgende Formel für den Monopol- bzw. Dipolterm des Potentials bekannt:

$$\Phi(\vec{R}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{p}}{R^3}\right)$$

mit

$$Q = \int d^3r\,\rho(\vec{r}), \qquad \text{und} \qquad \vec{p} = \int d^3r\,\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,.$$

Aus der Zeichnung entnehmen wir folgenden Ausdruck für die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = q\,[\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) - \delta(x)\delta(y-a)\delta(z) - \delta(x)\delta(y+a)\delta(z)]$$

Da die Integrale in Q und $\vec{p}$ über den gesamten Raum laufen vereinfacht sich die Gleichungen für Q und $\vec{p}$ wie folgt.

$$Q = \sum_{i=1}^{3} q_i = -q \qquad\qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i q_i = q\,a\,\vec{e}_z$$

Dabei stehen die q_i für die Ladung der Punktladungen und die $\vec{r}_i$ für deren Positionen. Damit ergibt sich als Nährung für das Potential:

$$\Phi(\vec{R}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{q}{R} + \frac{q\,a\,z}{R^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{q}{R} + \frac{q\,a\,\cos(\theta)}{R^2}\right)$$

Hier wurde $z = R\,\cos(\theta)$ gesetzt um den Ausdruck in Kugelkoordinaten zu erhalten. Um eine Nährung für das $\vec{E}$-Feld zu erhalten nutzen wir $\vec{E} = -\nabla\Phi$. Dazu benötigen wir den Gradienten in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

Damit erhalten wir als Näherung

$$\vec{E} = \nabla\Phi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{R^2} + \frac{2\,a\,\cos(\theta)}{R^3}\right)\vec{e}_r + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\,\sin(\theta)}{R^3}\vec{e}_\theta\,.$$

2. **Punktladung vor geerdeten Metallplatten.** Das Volumen (4 Pkt.)

$$V = \{\vec{r} = (x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, -\infty < z < +\infty\}$$

ist bei $x = 0$ und $y = 0$ durch geerdete Metallplatten begrenzt. Innerhalb von V befindet sich eine Punktladung q. Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ in V (mit Hilfe von Bildladungen). Berechnen Sie die Flächenladungsdichte und die Gesamtladung auf den Platten. Welche Kraft wirkt auf die Punktladung?

Lösung: Es handelt sich um ein zweidimensionales Problem, $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y)$. Die Punktladung $q_0 = q$ kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit an die Position $\vec{r}_0 := (a, b, 0)$ gesetzt werden. Mit einer ersten Bildladung $q_1 = -q$ bei $(-a, b, 0)$ könnte man die Bedingung $\Phi(0, y) = 0$ erfüllen, mit einer zweiten Bildladung $q_2 = -q$ bei $(a, -b, 0)$ die Bedingung $\Phi(x, 0) = 0$. Diese Bildladung verletzt jedoch die jeweils andere Randbedingung. Dies kann durch eine dritte Bildladung q_3 kompensiert werden.

Zu der gegebenen Punktladung wählen wir 3 Bildladungen: $q_0 = q$ bei $r_0 := (a, b, 0)$, $q_1 = -q$ bei $r_1 := (-a, b, 0)$, $q_2 = -q$ bei $r_2 := (a, -b, 0)$, $q_3 = q$ bei $r_3 := (-a, -b, 0)$. Die vier Punktladungen ergeben das Potential null auf den Ebenen $x = 0$ und $y = 0$. Das Potential alles Punktladungen ist

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

Dieses Potential löst das Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad \text{in V,} \qquad \Phi(\vec{r})|_R = 0$$

Die Flächenladungsdichte σ auf den Platten berechnet sich aus der Normalkomponente des elektrischen Felds:

$$4\pi\sigma(\vec{r})|_R = \vec{n} \circ \vec{E}(\vec{r})|_R \qquad \text{mit} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{3} q_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|vecr - \vec{r}_0}|^3$$

Wir berechnen die Flächenladungsdichten $\sigma(x, z) = E_y(x, 0, z)$ und $\sigma(y, z) = E_x(0, y, z)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(x, y) &= -\frac{qb}{2\pi}\left[\frac{1}{((x-a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}}\right] \qquad (x > 0) \\
\sigma(y, z) &= -\frac{qa}{2\pi}\left[\frac{1}{(a^2 + (y-b)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (y+b)^2 + z^2)^{3/2}}\right] \qquad (y > 0)
\end{aligned}$$

Die Ladungsdichten gelten auf den Metallplatten, also in der $x - z$-Ebene für $x > 0$, und in der $y - z$-Ebene für $y > 0$. Wir berechnen die Influenzladung auf der Platte in der $x - z$-Ebene:

$$\begin{aligned}
q_{y=0}^{infl} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma(x, z) = -\frac{qb}{\pi}\int_0^\infty dx \left[\frac{1}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + b^2}\right] \\
&= -\frac{qb}{\pi}\int_{-a}^{a} dx \frac{1}{x^2 + b^2} = -\frac{2q}{\pi}\arctan\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Mit dem entsprechenden Resultat für die $y-z$-Ebene erhalten wir für die Gesammtladung auf beiden Metallplatten:

$$q_{infl} = q^{infl}_{y=0} + q^{infl}_{x=0} = -\frac{2q}{\pi}\left[\arctan\frac{a}{b} + \arctan\frac{b}{a}\right] = -q$$

Die Kraft auf die Punktladung q bei $\vec{r}_0$ ist durch das elektrische Feld gegeben, das nicht von dieser Ladung selbst stammt, also durch das Feld der drei Bildladungen:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{3} q_k \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_k}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|^3} = -\frac{q^2}{4}\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_y\right]$$

3. **Potenzial aus externer Ladungsdichte und Polarisation.** In einem Dielektrikum sind die Ladungsdichte $\rho_{\text{ext}}(\vec{r})$ und die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ gegeben. Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potenzial (3 Pkt.)

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \Phi_{\text{ind}}(\vec{r})$$

die makroskopische Maxwellgleichung $\nabla \circ \vec{D} = \nabla \circ \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_{\text{ext}}$ löst.

Lösung: Das elektrostatische Potential ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \Phi_{\text{ind}}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Der zweite Term Φ_{ind} wird durch partielle Integration umgeformt:

$$\Phi_{\text{ind}}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\int d^3r' \frac{\nabla' \circ \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Die Polarisation soll lokalisiert sein, so dass die Randterme verschwinden. Damit wird das elektrostatische Potential zu

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int d^3r' \frac{\nabla' \circ \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Unter Verwendung von :$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$, wird dies zu

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho_{\text{ext}}(\vec{r}) + 4\pi\nabla \circ \vec{P}(\vec{r})$$

Mit $\Delta\Phi = -\nabla \circ \vec{E}$ erhalten wir hieraus die makroskopische Maxwellgleichung

$$\nabla \circ \vec{D}(\vec{r}) = \nabla \circ \left(\vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r})\right) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(\vec{r})$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 29. 04. 2009.