1. **Energie von Ladungsverteilungen.**
   (a) Welche Arbeit ist nötig, um eine Ladungsmenge Q aus dem Unendlichen gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche zu verteilen? (2 Pkt.)
   (b) Welcher Druck wirkt auf die Kugeloberfläche durch die Ladungsansammlung? (2 Pkt.)

   Hinweis: Betrachten Sie im Teil a die mechanische Arbeit für das Aufbringen infinitesimaler Ladungen im entsprechenden Feld. (insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Eine kleine Testladung dq in der Nähe einer homogen geladenen Kugeloberfläche der Ladung q spürt am Ort $\vec{r}$ die elektrostatische Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}\,.$$

Um eine solche Testladung dq aus dem Unendlichen auf die Kugeloberfläche aufzubringen, ist die Arbeit

$$\mathrm{d}W = -\int_\infty^R \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^R \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = -\left(-\frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 r}\bigg|_{r=\infty}^{R}\right) = \frac{q\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

notwendig. Zum Aufbringen einer Gesamtladung Q muss schließlich die Gesamtarbeit

$$W = \int_0^Q \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

aufgewandt werden.

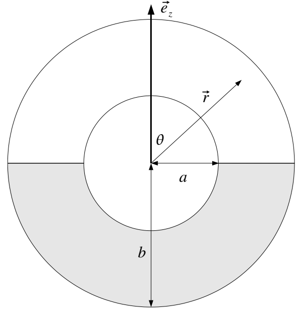
(b) Für die Kraft gilt

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2}\,,$$

mit der Kugeloberfläche $A = 4\pi R^2$ erhält man den Druck $p = \frac{F}{A}$

$$p = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}\,.$$

2. **Halbvoller Kugelkondensator.** Ein Kugelkondensator sei wie in der Skizze zur Hälfte mit einem linearen Dielektrikum ($\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$) gefüllt. Die innere Kugelschale habe den Radius a und trage die Ladung Q , die äußere habe den Radius b und auf ihr befinde sich die Landung $-Q$. Das Dielektrikum fülle den Zwischenraum für $\pi/2 \le \theta \le \pi$. Das Problem ist also azimutalsymmetrisch, d.h. alle Größen sind unabhängig von φ.



   (a) Bestimmen Sie das elektrische Feld an allen Punkten zwischen den Kugelschalen. (2 Pkt.)

(b) Berechnen Sie die Verteilung der Flächenladung auf der inneren Kugelschale. Wie groß ist die induzierte Ladungsdichte auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$? (1 Pkt.)

(c) Wie groß ist die Kapazität der Anordnung und die in ihr gespeicherte Energie? (1 Pkt.)

Hinweise: Ein azimutal-symmetrisches Potential lässt sich durch eine Reihenentwicklung mit Hilfe der Legendre-Polynome der Form

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l\, r^l + B_l\, r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

beschreiben. Bestimmen Sie aus der Randbedingung an metallischen Oberflächen und den Stetigkeitsbedingungen für das $\vec{E}$- und $\vec{D}$- Feld zunächst das Potential.

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Zu erst unterteilen wir die beiden Bereiche in den Bereich 1, in dem sich kein Dielektrikum befindet ($0 \leq \theta < \phi/2$) und den anderen Teil des Zwischenraums als Bereich 2 ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$). Wir machen für jeden der Bereiche einen Ansatz.

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l\, r^l + B_l\, r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$
$$\phi_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l\, r^l + D_l\, r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

Da es sich bei den Kugelschalen um metallische Flächen handelt, sind diese Äquipotentialflächen und es gilt

$$\phi_1(a,\theta) = \phi_2(a,\theta) \qquad \text{und} \qquad \phi_1(b,\theta) = \phi_2(b,\theta)\,.$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn

$$A_l = B_l = C_l = D_l = 0 \qquad \forall l \geq 1\,,$$

da sonst eine Abhängigkeit von θ bestünde. Somit vereinfacht sich unser Ansatz zu

$$\phi_1 = A_0 + B_0\, r^{-1} \qquad \text{und} \qquad \phi_2 = C_0 + D_0\, r^{-1}\,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzschicht bei $\theta = \pi/2$ stetig ist. Dies führt auf

$$0 = E_1^{\|} - E_2^{\|} = -\left(\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right) = -\left(-\frac{B_0}{r^2} + \frac{D_0}{r^2} \right)\,,$$

woraus sofort $B_0 = D_0$ folgt. Aus der stetigkeit des Potentials an der Grenzfläche folgt mit dieser Gleicheit $A_0 = C_0$. Damit sind die beiden Potetiale in allen Koeffizienten identisch und damit selbst identisch und wir haben damit für den Zwischenraum

$$\phi(r) = A_0 + \frac{B_0}{r}$$

gefunden. Die Konstanten bestimmen wir aus den Randbedingungen. Da der Kugelkondensator nach außen neutral ist, verschwindet das elektrische Feld dort und das Potential ist konstant. Wir folgen der Konvention

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A_0 + \frac{B_0}{b} = 0\,.$$

Das Potential der inneren Kugelschale setzen wir zunächst einfach ϕ_0. Das liefert die Bedingung

$$\phi_0 = A_0 + \frac{B_0}{r}\,.$$

Als Lösung der beiden Gleichungen finden wir

$$A_0 = -\frac{a}{b-a}\,\phi_0 \qquad \text{und} \qquad B_0 = \frac{ab}{b-a}\,\phi_0\,.$$

Damit lautet unser Potential nun

$$\phi(r) = \frac{ab}{b-a}\,\phi_0\,\frac{1}{r} - \frac{a}{b-a}\,\phi_0$$

Damit lautet das elektrische Feld im Zwischenraum

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{ab}{b-a}\,\phi_0\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

Die dielektrische Verschiebungsdichte $\vec{D}$ lautet damit:

$$\vec{D}(r) = \frac{ab}{b-a}\,\phi_0\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r \cdot \begin{cases} \epsilon_0 & 0 \le \theta < \pi/2 \\ \epsilon & \pi/2 \le \theta < \pi \end{cases}$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes und der ersten Maxwell-Gleichung finden wir

$$Q = \frac{ab}{b-a}\,\phi_0\,(\epsilon_0\,2\pi + \epsilon\,2\pi) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_0 = \frac{Q\,(b-a)}{2\pi\,ab\,(\epsilon_0+\epsilon)}\,.$$

Damit lautet das elektrische Feld zwischen den beiden Kugelschalen

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\,(\epsilon_0+\epsilon)}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

(b) Die freie Oberflächenladung bei $r = a$ berechnet sich nach

$$\sigma_f = \vec{D}\cdot\vec{n} = \vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi\,a^2\,(\epsilon_0+\epsilon)} \cdot \begin{cases} \epsilon_0 & 0 \le \theta < \pi/2 \\ \epsilon & \pi/2 \le \theta < \pi \end{cases}\,.$$

Die induzierte Ladungdichte σ_{ind} bei $r = a$ und $\pi/2 \le \theta \le \pi$ kompesiert einen Teil der freien Ladungen auf der Kugelschale und ergibts sich aus

$$\sigma_{ind} = \sigma - \sigma_f = \frac{Q\,(1-\epsilon)}{2\pi\,a^2\,(\epsilon_0+\epsilon)}\,.$$

(c) Die Kapazität ergibt sich mit den durchgeführten Berechnungen sehr schnell zu

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{\phi_0} = 4\pi\epsilon_0 \, \frac{1+\epsilon_r}{2} \, \frac{ab}{b-a} \, .$$

Dies Entspricht der Kapazität eines Kugelkondensators, der vollständig mit einem Dielektrikum mit $\epsilon_r' = (1+\epsilon_r)/2$ ausgefüllt ist. Die Energie könnten wir über

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} \mathrm{d}V$$

berechnen. Da wir aber die Kapazität der Anordnung bereit kennen, finden wir schnell

$$W = \frac{1}{2\,C} \, Q^2 = \frac{b-a}{4\pi\, ab\, (\epsilon_0 + \epsilon)} \, Q^2 \, .$$

3. **Homogen geladenes Rotationsellipsoid.** Ein homogen geladenes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = b > c$ trägt die Gesamtladung q. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (c-Achse gleich z-Achse), und berechnen Sie das Potential $\Phi(\rho, z)$ zunächst auf der z-Achse. Bestimmen Sie daraus die ersten beiden führenden Terme des Potentials für große Abstände. Zeigen Sie, dass das Potential im Innenraum von der Form (3 Pkt.)

$$\Phi(\rho, z) = A + Bz^2 + C\rho^2 \qquad \text{(Innenraum)}$$

ist, und bestimmen Sie die Konstanten A,B und C. Gehen Sie hierfür von dem zuvor bestimmten Potential $\Phi(0, z)$ und von der Poissongleichung aus. Berechnen Sie die Feldenergie der Ladungsverteilung.

Lösung: Aus der Ladung $q = (4\pi/3)\rho_0 a^2 c$ folgt die homogene Ladungsdichte ρ_0. In Zylinderkoordinaten gilt $\vec{r} := (0, 0, z)$ für einen Punkt auf der z-Achse und $\vec{r}' := (\rho' \cos\phi', \rho' \sin\phi', z')$ für einen beliebigen Punkt. Dies setzen wir in die Integralformel des Potentials ein:

$$\Phi(\rho = 0, z) = 2\pi\rho_0 \int_{-c}^{c} dz' \int_0^{a\sqrt{1-z'^2/c^2}} d\rho' \rho' \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + (z-z')^2}} \tag{1}$$

$$= 2\pi\rho_0 \int_{-c}^{c} dz' \left[\sqrt{(1 - a^2/c^2)z'^2 - 2zz' + a^2 + z^2} - |z - z'| \right] \tag{2}$$

Wir werten dieses Integral für $|z| > c$ und $|z| < c$ getrennt voneinander aus; dabei verwenden wir jeweils das Additionstheorem für den Arcussinus. Für $|z| > c$ erhalten wir

$$\Phi(0, z) = 2\pi\rho_0 \left[-\frac{c|z|}{\epsilon^2} + \frac{ac}{\epsilon} \left(1 + \frac{z^2}{a^2\epsilon^2} \right) \arcsin \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{z^2/a^2 + \epsilon^2}} \right) \right] \qquad (|z| > c)$$

Dabei ist $\epsilon = \sqrt{1 - c^2/a^2}$ die Exzentrizität. Wir entwickeln das Potential auf der positiven z-Achse:

$$\Phi(0, z) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \frac{a^2 c}{z} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{\epsilon^2 a^2}{z^2} + ... \right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{z^{l+1}} \qquad (z > c)$$

Es tragen nur die Koeffizienten b_l mit geradem l bei. Die niedrigsten Koeffizienten sind:

$$b_0 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^2 c = q, \qquad b_2 = -\frac{1}{5}q(a^2 - c^2) = \frac{Q_{33}}{2}$$

Dabei ist $Q_{33} = 2b_2$ das Quadrupolmoment des Ellipsoids. Die Lösung außerhalb der z-Achse erhalten wir durch die Ersetzung $z^{-l-1} \to r^{-l-1}P_l(\cos\theta)$. Die führenden Terme des Potentials sind dann

$$\Phi(\rho, z) = \frac{q}{r} + \frac{Q_{33}}{r^3}\frac{3\cos^2\theta - 1}{4} + ... \qquad (r > c)$$

Diese Entwicklung konvergiert im Bereich $r > c$. Wir kommen nun zur Auswertung für $|z| < c$:

$$\Phi(0, z) = 2\pi\rho_0 \left[ac\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{c}{a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}\right)z^2\right] \qquad (|z| > c) \qquad (|z| < c)$$

Im Innenraum des Ellipsoids gilt die Poissongleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho_0$. Ihre Lösung ist von der Form $\Phi = \Phi_{hom} + \Phi part$.Für die allgemeine Lösung setzen wir den Ansatz: $\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$, mit $b_l = 0$ an. Als partikuläre Lösung wählen wir $\Phi_{part} = -\pi\rho_0(x^2 + y^2)$. Damit erhalten wir

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_{hom} + \Phi_{part} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta) - \pi\rho_0 r^2\sin^2\theta \qquad \text{(Innenraum)}$$

Für $\theta = 0$ und $r = z$ muss dies mit (2) übereinstimmen. Dieser Vergleich bestimmt die Koeffizienten a_1(nur a_0 und a_2 tragen bei). Damit wird das Potential (im Innenraum) zu:

$$\begin{aligned}
\Phi(r,\theta) &= 2\pi\rho_0\left[ac\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{c}{a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}\right)r^2 P_2(\cos\theta)\right] - \pi\rho_0 r^2\sin^2\theta \\
&= 2\pi\rho_0\left[ac\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{c}{a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}\right)\frac{3z^2 - (\rho^2 + z^2)}{2}\right] - \pi\rho_0\rho^2
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile sind wir zu Zylinderkoordinaten übergegangen. Damit ergibt sich die Form $\Phi(\rho, z) = A + Bz^2 + C ßrho^2$ mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi\rho_0 ac\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon} \\
B &= -\frac{2\pi\rho_0}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{a}{c}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}\right) \\
C &= \pi\rho_0\left[-1 + \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{a}{c}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Die elektrostatische Feldenergie des homogen geladenen Rotationsellipsoids ist

$$\begin{aligned}
W_{em} &= \int_{Ellipsoid} d^3r\rho_0\Phi(\rho, z) = \pi\rho_0\int_{-c}^{c} dz \int_0^{a\sqrt{1-z^2/c^2}} d\rho\rho\left[A + Bz^2 + C\rho^2\right] \\
&= \frac{\pi}{4}\rho_0\int_{-c}^{c} dz\left[2a^2(A + Bz^2)\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) + Ca^4\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\rho_0 a^2 c\left[A + \frac{1}{5}Bc^2 + \frac{2}{5}Ca^2\right] = \frac{3q^2}{5a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Für die homogen geladene Kugel, $a = c = R$ mit $\epsilon \to 0$, erhält man die elektrostatische Energie $W_{em} = 3q^2/(5R)$.

Alternativ kann das Potential für das homogen geladene Rotationsellipsoid mit Hilfe von angepassten elliptischen Koordinaten berechnet werden. Man erhält dann auch im außenraum einen geschlossenen Ausdruck(S. Flügge, Rechenmethoden der Elektrodynamik, Springer 1986).

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 06. 05. 2009.