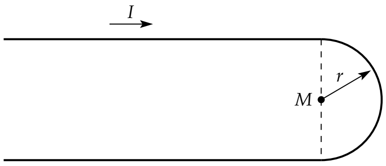
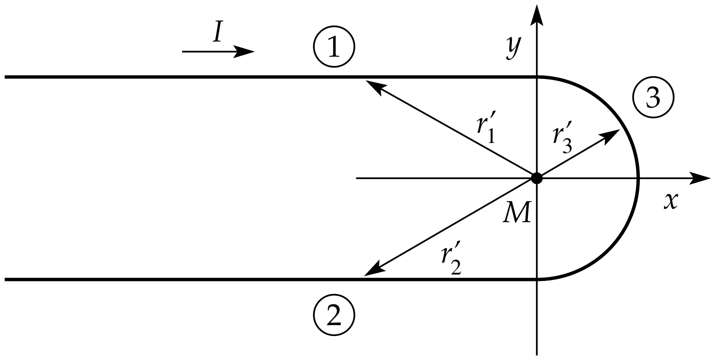


1. **Halbunendliche Leiterschleife.** Gegeben sei die abgebildete Leiterschleife aus zwei einseitig unendlichen Drähten und einem Halbkreis vom Radius r. Berechnen Sie das magnetische Feld im Mittelpunkt M des Halbkreises. (4 Pkt.)

Lösung: Wir rechnen das Magnetfeld mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes aus.

$$\vec{B}(M) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Punkt M bei $\vec{r} = 0$ der Ursprung ist. Dann gilt:

1. Anteil des magnetischen Feldes $\vec{B}_1(M)$, der vom oberen Draht hervorgerufen wird. Mit

$$\mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -l \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{e}_z R \, \mathrm{d}l$$

gilt

$$\vec{B}_1(M) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Leiter,1}} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{-R\vec{e}_z \, \mathrm{d}l}{\sqrt{l^2 + R^2}^3} = -\frac{I\mu_0}{4\pi R} \vec{e}_z \, .$$

2. Anteil des magnetischen Feldes $\vec{B}_2(M)$, der vom unteren Draht hervorgerufen wird. Mit

$$\mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -l \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{e}_z R \,\mathrm{d}l$$

gilt

$$\vec{B}_2(M) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\text{Leiter},2} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_0^{-\infty} \frac{R\vec{e}_z \,\mathrm{d}l}{\sqrt{l^2 + R^2}^3} = -\frac{I\mu_0}{4\pi R}\vec{e}_z \,.$$

3. Anteil des magnetischen Feldes $\vec{B}_3(M)$, der vom halbkreisförmigen Drahtbogen hervorgerufen wird. Mit

$$\mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} R \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ -R\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{e}_z R^2 \,\mathrm{d}\varphi$$

gilt

$$\vec{B}_3(M) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\text{Leiter},3} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{-\vec{e}_z \,\mathrm{d}\varphi}{R} = -\frac{I\mu_0}{4R}\vec{e}_z \,.$$

Damit beträgt das Gesamtfeld in M gleich

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) + \vec{B}_3(M) = -\frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \cdot \vec{e}_z \,.$$

2. **Homogen magnetisierte Kugel.** Betrachten Sie eine Kugel vom Radius R mit der Permeabilität μ_r. Sie sei im Inneren homogen magnetisiert.

   $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$

   Innerhalb und außerhalb der Kugel sei die Stromdichte $\vec{j} = 0$.

   (a) Begründen Sie, warum für das Magnetfeld (1 Pkt.)

   $\vec{H} = -\nabla\phi_m$

   geschrieben werden kann. Berechnen Sie das magnetische Potential ϕ_m im Außenraum der Kugel.

(b) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ außerhalb und innerhalb der Kugel! (1 Pkt.)

(c) Nehmen Sie an, dass die Magnetisierung $\vec{M}$ der Kugel durch eine Oberflächenstromdichte $\vec{j}$ hervorgerufen wird. Machen Sie sich klar, dass diese von der Form (2 Pkt.)

$$\vec{j} = \alpha(\theta)\delta(r-R)\vec{e}_\phi$$

sein muss. Drücken Sie $\alpha(\theta)$ durch M_0 aus.

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Innerhalb und außerhalb der Kugel : $\vec{j} = 0$.
$\rightarrow$Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:$rot\vec{H} = 0$.
$\rightarrow$ $\vec{H}$ ist ein Gradientenfeld: $\vec{H} = -\nabla\phi_m$. Mit $0 = div\vec{B} = \mu_0 div(\vec{M}+\vec{H})$ folgt: $\Delta\phi_m = div\vec{M}$. Die Lösung dieses Problems ist laut Vorlesung:

$$\phi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla_r \cdot \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Homogen magnetisierte Kugel , d.h. $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$:

$$\phi_m(\vec{r}) = -\frac{M_0}{4\pi}\frac{d}{dz}\int\limits_{V_K} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Wir wählen $\vec{r}$ parallel zur Polarachse:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{V_K} d^3r' \frac{1}{\vec{r}-\vec{r}'} &= 2\pi \int\limits_0^R r'^2 dr' \int\limits_{-1}^{+1} d\cos\theta' \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}} \\
&= -\frac{2\pi}{r}\int\limits_0^R r'dr' \left(|r-r'| - |r+r'|\right) \\
&= \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^R r'^2 dr' \qquad (r > r') \\
&= \frac{4\pi}{3}R^3 \cdot \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Aus $\frac{d}{dz}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{z}{r} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$ folgt : $\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{3}M_0R^3 \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$.
Gesamtmoment der Kugel:

$$\vec{m}\int d^3r'\vec{M}(\vec{r}') = \frac{4\pi}{3}R^3 \cdot M_0\vec{e}_z$$

Es folgt das Dipolpotential:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\circ\vec{r}}{r^3}$$

(b) Berechnung von $\vec{H}$ außerhalb der Kugel wie beim elektrostatischen Dipolfeld:

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}+(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\vec{b}\times rot\vec{a}+\vec{a}\times rot\vec{b}\\
\rightarrow \vec{H} &= -\nabla\phi_m = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\nabla\left(\vec{m}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left((m\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}\right) \qquad (\nabla\times\nabla\frac{1}{r}=0)\\
&= -\frac{1}{4\pi}(\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}\\
&= -\frac{1}{4\pi}m\frac{d}{dz}\frac{\vec{r}}{r^3}\\
&= -\frac{1}{4\pi}m\left(\frac{1}{r^3}\vec{e}_z-\vec{r}\frac{3}{r^4}\cdot\frac{z}{r}\right)
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right) \qquad (r>R)$$

Typisches Dipolfeld!
im inneren der Kugel gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \chi_m\vec{H} \qquad \text{(isotropes,lineares Medium)}\\
\rightarrow \vec{H} &= \frac{M_0}{\chi_M}\vec{e}_z \qquad (r<R)
\end{aligned}$$

(c) Oberflächenstromdichte:
Zylindersymmetrie:

$$|\vec{j}|=\alpha(\theta)\delta(r-R)$$

α ist unabhängig von ϕ.
Plausibel:

$$\vec{j}\sim\vec{e}_\phi$$

Kontrolle:
Für das magnetische Moment der Kugel muss $\vec{m}\sim\vec{e}_z$ gelten:

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\cdot r^3\delta(r-R)\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\alpha\theta\int_0^{2\pi}d\phi(\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi)\\
&= \frac{1}{2}R^3\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\alpha\theta\int_0^{2\pi}-\vec{e}_\theta\\
&= \pi R^3\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\alpha\theta\sin\theta\vec{e}_z\sim\vec{e}_z \qquad q.e.d.
\end{aligned}$$

also haben wir die richtige Abhängigkeit für $\vec{j}$ gefunden. Wir bestimmen $\alpha(\theta)$ aus den Randbedingungen der Felder an der Kugeloberfläche.
aus $dib\vec{B} = 0$ folgt mit dem Gaußschen - Kästchen für die Normalkomponenten:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Hier:

$$B_r(R + 0^+) - B_r(R - 0^+) = 0$$

Tangentialkomponenten:

$$\vec{n} = \vec{e}_r; \quad \vec{t} = \vec{e}_\phi \quad \rightarrow \vec{t} \times \vec{n} = \vec{e}_\theta$$

$$\Delta\vec{l}_1 = -\Delta\vec{l}_2 = \Delta l(\vec{n} \times \vec{t}) = R\Delta\theta(-\vec{e}_\theta)$$

Element der Stokes'schen Fläche:

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= rdrd\theta\vec{e}_\phi \\ \rightarrow \int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{j} &= \alpha(\theta)\Delta\theta \int_{R-0^+}^{R+0^+} rdr \cdot \delta(r - R) \\ &= \alpha(\theta)R\Delta\theta \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{j} &= \int_{\partial\Delta F} d\vec{r} \cdot \vec{H} \\ &= \vec{H}(R + 0^+) \cdot \Delta\vec{l}_2 + \vec{H}(R - 0^+) \cdot \Delta\vec{l}_1 \end{aligned}$$

$$R\Delta\theta \left(H_\theta(R + 0^+) - H_\theta(R - 0^+)\right)$$

$$\rightarrow H_\theta(R + 0^+) - H_\theta(R - 0^+) = \alpha\theta$$

Feldkomponenten aus Teil 1.:
$r > R$:

$$\begin{aligned} \phi_m(\vec{r}) &= \frac{m}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} \\ \rightarrow H_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_m = \frac{m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3} \end{aligned}$$

$r > R$:

$$\vec{H} = H_0\vec{e}_z; \qquad H_0 = \frac{M_0}{\chi_m}$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta$$

$$\rightarrow H_\theta = -\frac{M_0}{\chi_m}(-\sin\theta)$$

Somit:

$$\begin{aligned} H_\theta(R + 0^+) - H_\theta(R - 0^+) &= \frac{m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R^3} + \frac{M_0}{\chi_m}\sin\theta \\ &= \frac{1}{3}R^3 M_0 \frac{\sin\theta}{R^3} + \frac{M_0}{\chi_m}\sin\theta \\ &= M_0\sin\theta\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\chi_m}\right) \\ \rightarrow \alpha(\theta) &= \frac{3 + \chi_m}{3\chi_m}M_0\sin\theta \end{aligned}$$

3. **Magnetischer Monopol.** Betrachten Sie die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens (Masse m, Ladung q_e) im Feld eines (hypothetischen) magnetischen Monopols (q_m) der Form

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

(a) Finden Sie einen Ausdruck für die Beschleunigung des Teilchens und drücken Sie das Ergebnis durch q_e, q_m, m, $\vec{r}$ (seine Position) und $\vec{v}$ (seine Geschwindigkeit) aus. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass der Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ eine Konstante ist. (1 Pkt.)

(c) Weisen Sie nach, dass der Vektor (1 Pkt.)

$$\vec{Q} = m\,(\vec{r}\times\vec{v}) - \frac{\mu_0\,q_e\,q_m}{4\pi}\,\vec{e}_r$$

eine Erhaltungsgröße ist. Wählen Sie danach das Kugelkoordinatensystem, in dem $\vec{Q} \parallel \vec{e}_z$. Berechnen Sie in diesem Koordinatensystem $\vec{Q}\cdot\vec{e}_\varphi$ und zeigen Sie damit, dass θ eine Erhaltungsgröße ist. Als Folge dessen bewegt sich die q_e auf einem Kreiskegel. Man kann sogar zeigen, dass die Bahn einer Geodäte entspricht. Dies wurde bereits 1896 von H. Poincaré berechnet.

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a)

$$\vec{F} = m\vec{a} = q_e(\vec{v}\times\vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e q_m}{r^2}(\vec{v}\times\vec{e}_r)$$

$$\vec{a} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e q_m}{m r^3}(\vec{v}\times\vec{r})$$

Hierbei wurde $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ benutzt.

(b) Aus (a) folgt $\vec{a}\perp\vec{v}$ also auch $\vec{a}\,\vec{v} = 0$. Mit $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ ergibt sich:

$$0 = \dot{\vec{v}}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = v\frac{dv}{dt}.$$

Damit folgt:

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Also ist der Betrag von $\vec{v}$ eine Konstante.

(c)

$$\dot{\vec{Q}} = m\,\underbrace{(\vec{v}\times\vec{v})}_{=0} + m(\vec{r}\times\vec{a}) - \frac{\mu_0\,q_e\,q_m}{4\pi}\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r}$$

Wir setzen das Resultat aus (a) ein und erhalten:

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e q_m}{r^3}(\vec{r}\times(\vec{v}\times\vec{r})) - \frac{\mu_0\,q_e\,q_m}{4\pi}\left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r}\right).$$

Den linken Term schreiben wir mit der bac-cab-Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ um.

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \left[\frac{1}{r^3}(r^2\vec{v} - (\vec{r}\vec{v})\vec{r}) - \frac{\vec{v}}{r} + \frac{\vec{r}}{r^2}\frac{d}{dt}(\sqrt{\vec{r}\vec{r}}) \right]$$

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \left[\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{e}_r\vec{v}}{r}\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{r} + \frac{\vec{e}_r 2(\vec{r}\vec{v})}{2rr} \right] = 0$$

Damit ist $\vec{Q}$ eine Konstante. Wir wählen nun das Kugelkoordinatensystem in dem $\vec{Q} = Q\,\vec{e}_z$ gilt.

$$\vec{Q}\vec{e}_\phi = Q(\vec{e}_z\vec{e}_\phi) = m(\vec{r} \times \vec{v})\vec{e}_\phi - \frac{\mu_0\, q_e\, q_m}{4\pi}\,(\vec{e}_r\vec{e}_\phi)$$

Mit $\vec{e}_z\vec{e}_\phi = \vec{e}_r\vec{e}_\phi = 0$ folgt:

$$m(\vec{r} \times \vec{v})\vec{e}_\phi = 0.$$

Nun drücken wir $\vec{v}$ mit Hilfe der Kugelkoordinaten aus.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{r} \times \vec{v} = -r^2 \sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{e}_\phi$$

$$(\vec{r} \times \vec{v})\vec{e}_\phi = r^2\dot{\theta} = 0.$$

Also folgt:

$$\dot{\theta} = 0.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 13. 05. 2009.