1. **Homogene Wellengleichung.** Fehlen Ströme und Ladungen, dann erfüllen in der Lorentz-Eichung skalares Potential $\phi(\vec{r}, t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ im Vakuum die homogene Wellengleichung (mit $\Box = \Delta - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$):

$$\begin{aligned} \Box\phi(\vec{r}, t) &= 0\,, \\ \Box\vec{A}(\vec{r}, t) &= 0\,. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ und magnetische Induktion $\vec{B}$ dieselbe Differenzialgleichung erfüllen. (1 Pkt.)

   (b) Die Ausdrücke (1 Pkt.)

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \end{aligned}$$

   lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und$\vec{k}$? Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$!

   (c) Wie groß ist die Energiestromdichte(Energiefluss) parallel bzw. senkrecht zu $\vec{k}$? (1 Pkt.)

   (d) Wie groß ist die Feldenergiedichte? (1 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\nabla\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Man verwende, dass der D'alembert-Operator $\Box$ mit der Zeitableitung sowie dem Nabla-Operator vertauscht und erhällt daraus:

$$\begin{aligned} \Box\vec{E} &= -\nabla \underbrace{\Box\phi}_{=\frac{-\rho}{\epsilon_0}=0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\Box\vec{A}}_{=-\mu_0\vec{j}=0} = 0, \\ \Box\vec{B} &= \nabla \times \underbrace{\Box\vec{A}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten die Felder in folgender Schreibweise:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{2}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ \vec{B} &= \frac{\vec{B}_0}{2}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \end{aligned}$$

nun folgt aus $\Box\vec{E} = 0$($\vec{B}$-Feld analog):

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{2}\left(-k^2 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} - k^2 e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ &\quad -\frac{1}{c^2}\frac{\vec{E}_0}{2}\left(-\omega^2 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} - \omega^2 e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ &= -k^2\vec{E} + \frac{1}{c^2}\vec{E} = 0 \end{aligned}$$

Um dies für $\vec{E} \neq 0$ zu erfüllen folgt die Dispersionsrelation:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \rightarrow \omega = \pm c|k|.$$

Zur Untersuchung der Gegenseitigen Ausrichtung Untersuchen wir:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{2}\left(i\vec{k}e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} - i\vec{k}e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) = 0 \\ 0 &= \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{k}\right)\frac{i}{2}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} - e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \end{aligned}$$

Um dies Allgemein zu erfüllen muss also $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$ und analog $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$ gelten. Die Lagebeziehung zwischen $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ erhalten wir wir folgt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \begin{pmatrix} E_{0y}\partial_z - E_{0z}\partial_y \\ E_{0z}\partial_x - E_{0x}\partial_z \\ E_{0x}\partial_y - E_{0y}\partial_x \end{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) &= \frac{i\omega\vec{B}_0}{2}\left(-e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ \begin{pmatrix} E_{0y}k_z - E_{0z}k_y \\ E_{0z}k_x - E_{0x}k_z \\ E_{0x}k_y - E_{0y}k_x \end{pmatrix}\frac{i}{2}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} - e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) &= \frac{i\omega\vec{B}_0}{2}\left(-e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ \vec{E}_0 \times \vec{k}\frac{-i}{2}\left(-e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) &= \frac{i\omega\vec{B}_0}{2}\left(-e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 & \end{aligned}$$

Damit stehen also :$\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0 \perp \vec{k} \perp \vec{E}_0$.

(c)

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \\ &= \omega\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0)\sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ &= \left(\omega\vec{k}E_0^2 - \omega\vec{E}_0(\vec{E}_0\vec{k})\right)\sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ &= \frac{\omega}{\mu_0}\sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)E_0^2\vec{k} \end{aligned}$$

Es findes also nur ein Energiefluß in k-Richtung statt.

(d) Feldenergiedichte:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\left(\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0}B_0^2\right) \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \frac{1}{\mu_0}B_0^2\sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

2. **Feldenergie in einer Spule.** Durch eine lange Spule mit n Windungen pro Längeneinheit fließe ein allmählich anwachsender Strom. Der Spulenradius sei R, und der Strom verhalte sich gemäß $I(t) = at$. (4 Pkt.)
   (a) Berechnen Sie das induzierte elektrische Feld im Abstand $r < R$ von der Spulenachse. (2 Pkt.)
   (b) Ermitteln Sie Betrag und Richtung des Poyntingvektors $\vec{S}$ an der zylindrischen Oberfläche (bei $r = R$). (1 Pkt.)
   (c) Berechnen Sie den Fluss $\oint \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{S}$ in das Innere der Spule, und zeigen Sie, dass der Fluss gleich der Anstiegsgeschwindigkeit der magnetischen Energie der Spule ist. (1 Pkt.)

Lösung:

(a) Wir betrachten das Problem in Zylinderkoordinaten. Das magnetische Feld im Inneren einer Spule sei durch

$$\vec{B} = B(t)\vec{e}_z \qquad \text{mit} \qquad B(t) = \mu_0 n I(t)$$

gegeben. Wegen $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ kann für die elektrische Feldstärke der Symmetrieansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -E(r, t)\vec{e}_\varphi$$

gewählt werden. Mit einer von einer $\vec{E}$-Feldlinie begrenzten Fläche A erhält man

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -E(r, t)\oint_{\partial A} \mathrm{d}s = -E(r, t)2\pi r$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \begin{cases} -\dot{B}A = -\mu_0 n\dot{I}A = -\mu_0 n a\pi r^2 & r \le R\,, \\ -\dot{B}\pi R^2 = -\mu_0 n a \pi R^2\,, & r \ge R\,. \end{cases}$$

Das elektrische Feld ist demnach durch

$$E(r, t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n}{2} a r\,, & r \le R\,, \\ \dfrac{\mu_0 n}{2} a \dfrac{R^2}{r}\,, & r \ge R\,. \end{cases}$$

gegeben.

(b) Der Poyntingvektor berechnet sich nach

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 R(na)^2 t}{2}\vec{e}_r\,.$$

(c) Der Fluss in das Innere der Spule ist

$$\oint \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{S} = \mu_0 \pi h (naR)^2 t\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

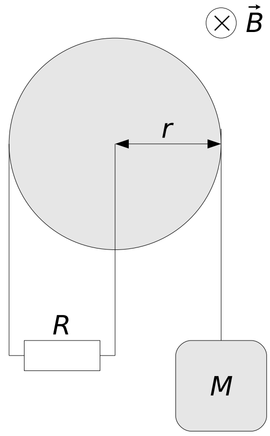
$$\oint \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{S} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}$$

ist. Die magnetische Feldenergie ist

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^R rB^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\mu_0\pi(naR)^2 t^2\,.$$

Die Ableitung der magnetischen Feldenergie nach der Zeit ist demnach gleich dem Fluss in das Innere der Spule.

3. **Faradays Gleichstromgenerator.** Nebenstehende Skizze zeigt das Prinzip des Faraday'schen Gleichstromgenerators. Er besteht aus einer ideal leitenden Scheibe (Radius r) in einem konstanten Magnetfeld ($|\vec{B}| = B$), das senkrecht zur Scheibe ist. Schleifkontakte verbinden den Rand der Scheibe über einen Widerstand R mit der Drehachse. Wenn die Scheibe mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit rotiert, liefert die Anordnung einen glatten Gleichstrom. Um die Scheibe ist ein Seil gewickelt, an dem die Masse M hängt. Sie verursacht das nötige Drehmoment, da sich die Masse im homogenen Schwerefeld der Erde befindet.



(a) Erklären Sie, wie und warum ein Strom fließt. Finden Sie einen quantitativen Ausdruck für die Stromstärke als Funktion der Winkelgeschwindigkeit. (2 Pkt.)

(b) Angenommen, das Seil wäre lang genug, so wird das System eine konstante Winkelgeschwindigkeit erreichen. Berechnen Sie diese und den dabei fließenden Strom. (1 Pkt.)

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a) Wir betrachten die Bewegung eines Elektrons in der Scheibe und die Kraft, die auf es wirkt. Wir führen zuerst Zylinderkoordinaten ein, so dass gilt $\vec{B} = -B\,\vec{e}_z$, $\vec{r}\,' = r'\,\vec{e}_r$ und $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$. Wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist mit der die Scheibe rotiert. Auf ein Elektron am Ort $\vec{r}\,'$ in der Scheibe wirkt die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = -e\,(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ folgt:

$$\vec{F} = -e\,((\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \times \vec{B}).$$

Einsetzen der einzelnen Größen liefert:

$$\vec{F} = -e\,((\omega\,\vec{e}_z \times r'\,\vec{e}_r) \times -B\,\vec{e}_z) = eB\omega r'((\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \times \vec{e}_z) = eB\omega r'(\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) = eB\omega r'\,\vec{e}_r.$$

Durch die Verschiebung der Elektronen entsteht ein elektrisches Feld $\vec{E}$, dass sich aus $\vec{F} = -e\vec{E}$ berechnen lässt:

$$\vec{E} = -B\omega r'\,\vec{e}_r.$$

Um die Potentialdifferenz U zwischen den Kontakten zu finden integrieren wir in gerader Linie vom Mittelpunkt zum Rand der Scheibe über das Feld.

$$U = -\int_0^r \vec{E}d\vec{r}\,' = \omega B \int_0^r r'dr' = \frac{1}{2}\omega B r^2.$$

Der zugehörige Strom ergibt sich mit dem Widerstand R dann als:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\omega B r^2}{2R}.$$

(b) Um den Strom bei konstanter Winkelgeschwindigkeit zu berechnen betrachten wir die Energieerhaltung. Die Leistung, die am Widerstand verloren geht ist:

$$P = U\,I = I^2\,R = \frac{\omega^2 B^2 r^4}{4R} = \frac{\dot{\varphi}^2 B^2 r^4}{4R}.$$

Die Energie der Masse beträgt:

$$E = \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 - Mgr\varphi.$$

Damit die Energie erhalten bleibt muss also folgendes gelten:

$$0 = P + \dot{E} = \frac{\dot{\varphi}^2 B^2 r^4}{4R} + \frac{d}{dt}\left(\frac{J}{2}\dot{\varphi}^2\right) - Mgr\dot{\varphi}$$

Sei nun ω_f die konstante Winkelgeschwindigkeit, die sich nach einiger Zeit einstellt:

$$0 = P + \dot{E} = \frac{\omega_f^2 B^2 r^4}{4R} + \frac{d}{dt}\left(\frac{J}{2}{\omega_f}^2\right) - Mgr\omega_f = \frac{\omega_f^2 B^2 r^4}{4R} - Mgr\omega_f.$$

Umstellen der Gleichung nach ω_f und anschließendes einsetzen in die Formel aus (a) liefert:

$$\omega_f = \frac{4MgR}{B^2 r^3},$$

$$I_f = \frac{2Mg}{Br}.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **15 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 10. 06. 2009.