PD Dr. S. Mertens — **Theoretische Physik II – Elektrodynamik** — SS 2009
M. Hummel — **Blatt 11** — 24. 06. 2009

1. **Energieabstrahlung eines oszillierenden Dipols.** Das Fernfeld eines oszillierenden elektrischen Dipols mit dem elektrischen Dipolmoment $\vec{p}_0$ beträgt in Kugelkoordinaten

$$\vec{E} = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\left[\vec{p}_0 - \vec{e}_r(\vec{p}_0\cdot\vec{e}_r)\right], \qquad \vec{B} = \frac{ck^2}{4\pi}\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\vec{e}_r\times\vec{p}_0\,.$$

(a) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$. (1 Pkt.)

(b) Wie groß ist der über eine Periode gemittelte Wert des Pointing-Vektors $\langle\vec{S}\rangle$ als Funktion des von den Vektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{p}_0$ eingeschlossenen Winkels θ? (1 Pkt.)

(c) Skizzieren Sie die Abstrahlungscharakteristik ($\langle\vec{S}\rangle$ als Funktion von θ) des Dipols. (1 Pkt.)

(d) Welche mittlere Strahlungsleistung $\langle P\rangle$ gibt der oszillierende Dipol insgesamt ab? (1 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ ist mit

$$\begin{aligned}\left[\vec{p}_0 - \vec{e}_r(\vec{p}_0\cdot\vec{e}_r)\right]\times(\vec{e}_r\times\vec{p}_0) &= \vec{e}_r\times\{[\vec{p}_0 - \vec{e}_r(\vec{p}_0\cdot\vec{e}_r)]\cdot\vec{p}_0\} - \\ &\qquad \vec{p}_0\times\{[\vec{p}_0 - \vec{e}_r(\vec{p}_0\cdot\vec{e}_r)]\cdot\vec{e}_r\} \\ &= \vec{e}_r\cdot\left[\vec{p}_0^{\,2} - (\vec{p}_0\cdot\vec{e}_r)\right]\end{aligned}$$

gleich

$$\vec{S} = \frac{ck^4}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{\cos^2(kr-\omega t)}{r^2}p_0^2\left[1-(\vec{e}_r\cdot\vec{p}_0/p_0)^2\right]\vec{e}_r\,.$$

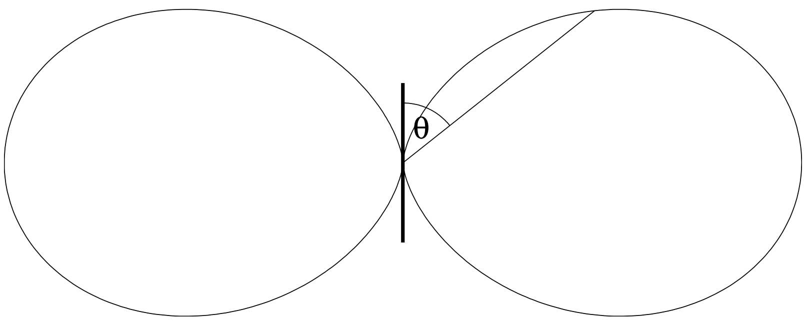
(b) Der über eine Periode gemittelte Wert des Pointing-Vektors ist mit

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+2\pi/\omega}\cos^2(kr-\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_r\cdot\vec{p}_0/p_0 = \cos\theta$$

gleich

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{ck^4}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{p_0^2\sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r\,.$$

(c) Die zweidimensionale Projektion der Abstrahlungscharakteristik des Dipols hat die in der folgenden Abbildung gezeigte Form.



(d) Die mittlere Strahlungsleistung $\langle P\rangle$, die der oszillierende Dipol insgesamt in den Raum abstrahlt, ergibt sich aus der Integration von $\langle\vec{S}\rangle$ über eine Kugelschale mit Radius r. Da der Poynting-Vektor überall senkrecht auf der Kugeloberfläche steht, gilt mit

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3} \qquad \text{und} \qquad \omega = kc$$

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \int_{K(r)} \langle\vec{S}\rangle\cdot\mathrm{d}\vec{f} = \int_{K(r)} \langle S\rangle\,\mathrm{d}f = \int_0^\pi \frac{ck^4}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{p_0^2\sin^2\theta}{r^2}2\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{ck^4p_0^2}{12\pi\varepsilon_0} = \frac{\omega^4p_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}\,.\end{aligned}$$

2. **Streuung einer monochromatischen, ebenen EM-Welle.**Eine monochromatische Welle $(\vec{E}_i,\vec{B}_i)$ falle auf ein System, dessen Ausmaße klein gegenüber der Wellenlänge der Strahlung sind ($d << \lambda$). Die Umgebung des Streuenden Systems sei Vakuum ($\mu_r = \epsilon_r = 1$). Das elektrische Feld $\vec{E}_i$ sei in Richtung $\vec{\eta}_i$ linear polarisiert. Das einfallende Feld induziert in dem System elektrische und magnetische Multipole, wodurch dieses zur Quelle gestreuter Strahlung $(\vec{E}_S,\vec{B}_S)$ wird.

   (a) Wie lauten die Felder $\vec{E}_S,\vec{B}_S$ in der so genannten Strahlungszone ($kr >> 1$), wenn man sich auf den elektrischen Dipolbeitrag beschränkt? (1 Pkt.)

   (b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt (1 Pkt.)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_S,\vec{\eta}_S);\vec{n}_i,\vec{\eta}_i) = \frac{\text{gestreuter Energiefluss}(\vec{n}_S,\vec{\eta}_S)}{d\Omega\cdot\text{einfallende Energieflussdichte}(\vec{n}_i,\vec{\eta}_i)}$$

   (c) Die einfallende Welle werde speziell an einer dielektrischen Kugel ($\epsilon_r = const, \mu_r = 1$) vom Radius R gestreut. Berechnen sie $d\sigma/d\Omega$. Welche Aussage ist zur Polarisation $\vec{\eta}_S$ der gestreuten Strahlung möglich? (1 Pkt.)

   (d) Im Normalfall ist die einfallende elektromagnetische Welle völlig unpolarisiert, alle Richtungen des Polarisationsvektors $\vec{\eta}_i$ sind gleich stark vertreten. Berechnen Sie die Polarisation $P(\theta)$ der gestreuten Strahlung: (1 Pkt.)

$$P(\theta) = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\perp - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{||}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\perp + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{||}}$$

   $(d\sigma/d\Omega)_{||(\perp)}$ ist der Streuquerschnitt für eine in der (senkrecht zu der) Streuebene linear polarisierten einfallenden Welle. Unter der Streuebene versteht man die durch $\vec{n}_i$ und $\vec{n}_S$ aufgespannte Ebene.

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Strahlungszone: $d << \lambda << r$

$$\begin{aligned}\vec{B}_S(\vec{r}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{n}_s\times\vec{p}) \\ \vec{E}_S(\vec{r}) &\approx c\left(\vec{B}_S(\vec{r})\times\vec{n}_S\right)\end{aligned}$$

$(\vec{E}_S, \vec{B}_S, \vec{n}_S)$: orthogonales Dreibein, $\vec{p} = \int d^3 r \vec{r}' \rho(\vec{r}')$: elektrisches Dipolmoment
Zeitabhängigkeiten:

$$\vec{B}_S(\vec{R}, t) = \vec{B}_S(\vec{r}) e^{-i\omega t}, ...$$

(b) Einfallende Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \vec{\eta}_i E_0 e^{ik\vec{n}_i \cdot \vec{r}}, \\ \vec{B} - i &= \frac{1}{c}(\vec{n}_i \times \vec{E}_i)\end{aligned}$$

Der Streuquerschnitt hat die Dimension einer Fläche:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_S, \vec{\eta}_S); \vec{n}_i, \vec{\eta}_i) = \frac{\left(\vec{n}_S \cdot \overline{\vec{S}_S(\vec{n}_S, \eta_S)}\right) r^2}{d\Omega \cdot \vec{n}_i \overline{\vec{S}_i(\vec{n}_i, \vec{\eta}_i)}}$$

Wir benutzen:

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \frac{1}{2\mu_0} RE(\vec{E} \times \vec{B}*) = \frac{1}{2\mu_0 c} Re\left(\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}*\right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c}\left[Re(n|\vec{E}|^2) - Re(\vec{E} * (\vec{E} \cdot \vec{n}))\right] = \vec{n}\frac{|E|^2}{2\mu_0 c}\end{aligned}$$

Damit gilt speziell:

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}_S(\vec{n}_S, \vec{\eta}_S)} &= \vec{n}_S \frac{|\vec{\eta}_S \cdot \vec{E}_S|^2}{2\mu_0 c}, \\ \overline{\vec{S}_i(\vec{n}_i, \vec{\eta}_i)} &= \vec{n}_i \frac{|\vec{\eta}_i \cdot \vec{E}_i|^2}{2\mu_0 c} = \vec{n}_i |\vec{E}_0|^2 \frac{1}{2\mu_0 c}, \\ \vec{\eta}_S \cdot \vec{E}_S &= \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{\eta}_S \cdot [(\vec{n}_S \times \vec{p}) \times \vec{n}_S] = \\ &= \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}[(\vec{\eta}_S \cdot \vec{p}) - (\vec{\eta}_S \cdot \vec{n}_S)(\vec{p} \cdot \vec{n}_S)].\end{aligned}$$

In der Strahlunszone sind die Felder transversal polarisiert, deswegen:

$$\begin{aligned}\vec{\eta}_S \cdot \vec{n}_S &= 0 \\ \rightarrow |\vec{\eta}_S \cdot \vec{E}_S|^2 &= \frac{k^4}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{1}{r^2}|\vec{\eta}_S \cdot \vec{p}|^2 \\ \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_S, \vec{\eta}_S); \vec{n}_i, \vec{\eta}_i) &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{k^4}{|\vec{E}_0|^2}(\vec{\eta}_S \cdot \vec{p})^2.\end{aligned}$$

Die Abhängigkeit von $(\vec{n}_i; \vec{\eta}_i)$ steckt natürlich implizit im induzierten Dipolmoment $\vec{p}$.
Rayleigh-Gesetz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim k^4 \sim \lambda^{-4}$$

(blauer Himmel, Abendröte).

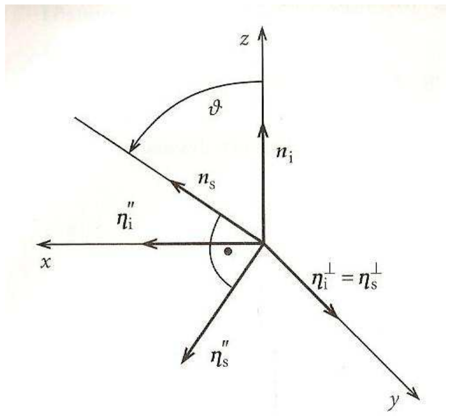
(c) $\lambda >> d$: Feld $\vec{E}_i$ im inneren der Kugel praktisch homogen,
$r \sim \lambda$: quasistatisch. Für die Polarisation einer Dielektrischen Kugel gilt:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right) \vec{E}_i, \\ \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= k^4 R^6 \left|\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right|^2 (\vec{\eta}_S \cdot \vec{\eta}_i)^2 \end{aligned}$$

Polarisation:

$$\vec{\eta}_S \sim [(\vec{n}_S \times \vec{p}) \times \vec{n}_S] \sim [(\vec{n}_S \times \vec{\eta}_i) \times \vec{n}_S] = \vec{\eta}_i - \vec{n}_S(\vec{n}_S \cdot \vec{\eta}_i)$$

Die gestreute Welle ist in der von $\vec{\eta}_i$ und $\vec{n}_S$ aufgespannten Ebene senkrecht zu $\vec{n}_S$ linear polarisiert!

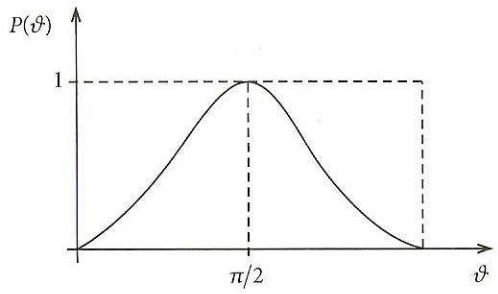


(d)

Das Bild erklärt sich mit vorausgegangenen Teilergebnissen:

$$\begin{aligned} (\vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_S)_{||} &= \cos\theta \\ (\vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_S)_{\perp} &= 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\theta) = \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$$



Für $\theta = \pi/2$ hat P sein Maximum. In dieser Richtung ist aus der unpolarisiert einfallenden Strahlung eine vollständig linear polarisierte Welle geworden.

3. **Zerfließendes Wellenpaket.** Ein Gauß'sches Wellenpaket (3 Pkt.)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\, \mathrm{d}k \qquad \text{mit}$$
$$f(k) = f_0\, \mathrm{e}^{-\alpha(k-k_0)^2} \qquad \alpha > 0$$

bewege sich in einem Medium mit Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2 \,.$$

Berechnen Sie $u(x,t)$ und bestimmen Sie die Breite des Wellenpaketes sowie die Lage des Maximums von $|u(x,t)|$ und diskutieren Sie deren zeitliches Verhalten.

Lösung: Gegeben ist die Welle

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\, \mathrm{d}k \qquad \text{mit}$$
$$f(k) = f_0\, \mathrm{e}^{-\alpha(k-k_0)^2} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{und} \qquad \omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2 \,.$$

Mit der Substitution $k - k_0 = k'$ und $\mathrm{d}k = \mathrm{d}k'$ ergibt sich für die Welle $u(x,t)$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha k'^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((k'+k_o)x - t(\omega_0 + v_g \cdot k' + \beta k'^2)\right)}\, \mathrm{d}k' \\
&= f_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k'^2(\alpha + \mathrm{i}\beta t) + \mathrm{i}k'(x - v_g t)}\, \mathrm{d}k' \\
&= f_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta t)\left(k'^2 - \frac{\mathrm{i}k'(x-v_g t)}{(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}\right)}\, \mathrm{d}k' \\
&= f_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta t)\left(k' - \frac{\mathrm{i}(x-v_g t)}{2(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}\right)^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_g t)^2}{4(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}}\, \mathrm{d}k' \\
&= f_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_g t)^2}{4(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta t)\left(k' - \frac{\mathrm{i}(x-v_g t)}{2(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}\right)^2}\, \mathrm{d}k' \\
&= f_0 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \mathrm{i}\beta t}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_g t)^2}{4(\alpha+\mathrm{i}\beta t)}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} \,.
\end{aligned}$$

Der Absolutbetrag der Welle ist

$$|u(x,t)| = f_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x-v_g t)^2}{4(\alpha^2+\beta^2 t^2)}} \,.$$

Hieran ist leicht abzulesen, dass sich das Maximum des Wellenpakets mit der Geschwindigkeit v_g in x-Richtung bewegt und bei $x_{max} = v_g t$ liegt. Außerdem ist die Breite des Gauß'schen Wellenenpaketes

$$\Delta u(t) = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}} \,.$$

und wächst für $t > 0$ monoton in der Zeit. Man sagt, das Wellenpaket dispergiert.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 01 07. 2009.