1. **Vektoridentitäten.** Seien $\vec{u}$ und $\vec{w}$ Vektorfelder. Beweisen Sie die Identitäten (2 Pkt.)

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$$

und

$$\nabla\times(\vec{u}\times\vec{w}) = \vec{u}\,(\nabla\cdot\vec{w}) - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w}\,.$$

2. **Volumendilatation.** Betrachten Sie ein Fluidelement, das zum Zeitpunkt t das Volumen V hat. Auf Grund der Bewegung des Fluids kann sich dieses Volumen ändern. Es sei V' das Volumen zum Zeitpunkt $t + \mathrm{d}t$. Die Volumendilatation $\mathrm{d}\theta$ ist durch (3 Pkt.)

$$\mathrm{d}\theta = \frac{V' - V}{V}$$

definiert. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{v}$$

ist. Berechnen Sie dann $\partial\theta/\partial t$ für eine kugelsymmetrische Strömung, die ausserhalb einer Kugel mit Radius R durch

$$\vec{v} = \frac{v_0(t)}{r^n}\vec{e}_r$$

gegeben ist. Was zeichnet den Fall $n = 2$ aus?

3. **Rotierender Wassereimer.** Betrachten Sie eine idealen Flüssigkeit, die wie ein starrer Körper um eine vertikale Achse rotiert. Berechnen Sie den Druck in der Flüssigkeit mit Hilfe der Euler'schen Gleichung und zeigen Sie dann, daß die Oberfläche der Flüssigkeit wie ein Rotationsparaboloid geformt ist. Was passiert in diesem System mit einem Gegenstand, der an der Oberfläche schwimmt? (4 Pkt.)

4. **Borda-Mündung.** Betrachten Sie den Ausfluß einer idealen Flüssigkeit aus einem Gefäß durch eine Borda-Mündung mit Querschnittsfläche A. Zeigen Sie, daß die Querschnittsfläche des austretenden Strahls genau $A/2$ ist. Argumentieren Sie dafür mit der Energie- und der Impulsbilanz! Warum versagt dieses Argument bei einem einfachen Loch in der Gefäßwand als Mündung? (4 Pkt.)

Die Besprechung dieser Aufgaben erfolgt am 24. 04. 2013.