1. **Ebene Potentialströmung.** Das Geschwindigkeitspotential einer ebenen Strömung sei gegeben durch (3 Pkt.)

$$\phi = ax(x^2 - 3y^2)\,,$$

mit positiver Konstanten a. Berechnen Sie den Fluß durch eine Kurve, die die Punkte $M = (0,0)$ und $M' = (1,1)$ verbindet.

Lösung: Es sei $\vec{n} = (n_x, n_y)$ der Einheitsnormalenvektor auf der Kurve L. Dann ist $\vec{t} = (n_y, -n_x)$ der Einheitstangentialvektor an L. Der Fluß Q durch die Kurve L ist

$$\begin{aligned} Q &= -\int_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}t = -\int_L (v_x n_x + v_y n_y)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_L \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}t_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}t_y\right)\mathrm{d}t = \int_L \nabla\psi\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_L \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int_L \mathrm{d}\psi = \psi(M') - \psi(M)\,. \end{aligned}$$

In unserem Fall ist $\phi = ax(x^2 - 3y^2)$ und damit

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 3ax^2 - 3ay^2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,,$$

also $\psi = 3ax^2y - ay^3 + g(x)$. Andererseits ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 6axy + g'(x) = -v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 6axy\,,$$

also $g'(x) = 0$ und damit $g = \text{const.}$. ObdA können wir $g = 0$ annehmen. Damit ist $\psi = ay(3x^2 - y^2)$ und für den Fliuß erhalten wir $Q = \psi(1,1) - \psi(0,0) = 2a$.

2. **Quelle vor Wand.** Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung, die entsteht, wenn sich eine Quelle der Stärke Q im Abstand h zu einer unendlich großen, ebenen Wand befindet. Dabei soll die Strömungsgeschwindigkeit in unendlicher Entfernung von der Quelle verschwinden. Hinweis: Denken Sie an die Methode der Spiegelladungen aus der Elektrostatik. (3 Pkt.)

Lösung: Wie in der Elektrostatik („Spiegelladung“) befriedigen wir die Randbedingungen auf der Wand dadurch, daß wir eine Quelle in gleich großer Entfernung auf der anderen Seite der Wand annehmen, d.h.

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\ln(z - ih) + \frac{q}{2\pi}\ln(z + ih)\,.$$

Damit ist die komplexe Geschwindigkeit

$$w = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{z - ih} + \frac{1}{z + ih}\right) = \frac{q}{\pi}\frac{z}{z^2 + h^2}\,.$$

Auf der Wand ist

$$w(z = x) = \frac{q}{\pi}\frac{x}{x^2 + h^2}$$

rein reell, also $v_y = 0$, wie es sein muß. Und für $|z| \to \infty$ ist $|w| \to 0$, auch wie es sein muß.

3. **Zirkulation eines komplexen Potentials.** Eine ebene Strömung sei durch das komplexe Potential (2 Pkt.)

$$f(z) = (1 - i)\ln\frac{z-1}{z+1}$$

gegeben. Berechnen Sie die Zirkulation dieses Feldes entlang eines Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt bei $z = -1$.

Lösung: Das komplexe Geschwindigkeitspotential kann geschrieben werden als

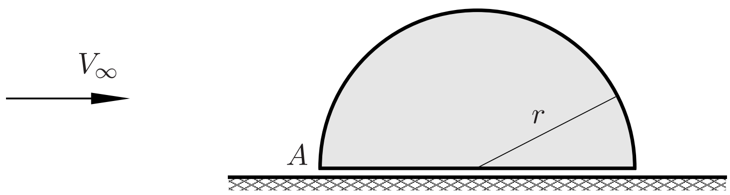
$$\begin{aligned} w(z) &= \ln(z-1) - \ln(z+1) - i\ln(z-1) + i\ln(z+1) \\ &= \frac{2\pi}{2\pi}\ln(z-1) - \frac{2\pi}{2\pi}\ln(z+1) + \frac{2\pi}{2\pi i}\ln(z-1) - \frac{2\pi}{2\pi i}\ln(z+1)\,. \end{aligned}$$

Das entspricht von links nach rechts:

- einer Quelle der Stärke 2π bei $z = 1$,
- einer Senke der Stärke 2π bei $z = -1$,
- einem Wirbel der Zirkulation 2π im Gegen-Uhrzeigersinn mit Zentrum bei $z = 1$ und
- einem Wirbel der Zirkulation 2π im Uhrzeigersinn mit Zentrum bei $z = -1$.

Nur der letztgenannte Wirbel liefert einen nicht verschwindenden Beitrag zur Zirkulation entlang der Kurve C: $\Gamma = -2\pi$.

4. **Baumstamm hebt ab.** Ein Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt mit Radius r und Masse pro Länge m wird der Länge nach halbiert. Ein Hälfte wird wie in der Abbildung gezeigt auf den Boden gelegt. Wie groß darf die Windgeschwindigkeit V_∞ höchstens sein, damit die Baumstammhälfte nicht abhebt? (4 Pkt.)



Nehmen Sie dabei an, dass der Druck in der Lücke zwischen Baumstamm und Boden konstant ist und dem Druck am Staupunkt entspricht. Nehmen Sie ausserdem an, daß die Strömung um den Baumstamm herum eine Potentialströmung ist.

Lösung: Die Kraft auf den Baumstamm ergibt sich aus der Differenz der Druckkräfte auf die obere, gewölbte Seite und die untere, gerade Seite. Wir beginnen mit der gewölbten Oberseite.

Wir betrachten dazu ein kleines Lineinestück $\mathrm{d}l$ entlang des Umfanges des Baumstamms. Die Druckkraft auf dieses Linienelement (pro Länge) steht senkrecht auf der Oberfläche und hat den Betrag

$$|\mathrm{d}\vec{F}^0| = p\mathrm{d}l\,.$$

Die y-Komponente dieser Kraft ist

$$\mathrm{d}F_y^o = -p\mathrm{d}l\,\cos\alpha\,,$$

wobei α der Winkel ist, den $\mathrm{d}l$ zur x-Achse hat. Man macht sich durch eine Zeichnung leicht klar, daß $\mathrm{d}l\,\cos\alpha = \mathrm{d}x$. Das ergibt $\mathrm{d}F_y^o = -p\,\mathrm{d}x$ und durch Integration

$$F_y^o = -\int_{-r}^{r} p\,\mathrm{d}x\,.$$

Für die Kraft auf die gerade Unterseite des Stammes nehmen wir an, daß der Spalt zwischen Boden und Unterseite so klein ist, daß die Luft darin sich nicht bewegt. Damit haben wir überall im Spalt den Staudruck p_0 am Punkt A. Für die Kraft auf die Unterseite ergibt das

$$F_y^u = \int_{-r}^{r} p_0\,\mathrm{d}x\,.$$

und für die resultierende Kraft in y-Richtung erhalten wir so

$$F_y = \int_{-r}^{r} (p_0 - p)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jetzt müssen wir nur noch den Druck p entlang der gewölbten Oberfläche des Baumstammes bestimmen. Die Strömung um den Baumstamm entspricht der Strömung um einen kreisförmigen Zylinder in der Halbebene oberhalb des Staupunkt-Linie. Das heißt, daß die Strömungsgeschwindigkeit entlang der Oberfläche des Baumstammes den Betrag

$$v = 2V_\infty \sin\theta$$

ist, wobei V_∞ die Strömungsgeschwindigkeit in unendlicher Entfernung vom Baumstamm ist und θ der Winkel zwischen Ortsvektor und x-Achse. Die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2}$$

liefert so den Druck auf der Oberfläche,

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2 - 2\rho V_\infty^2 \sin^2\theta$$

und, indem wir $v = 0$ setzen, den Staudruck p_0

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2\,.$$

Setzen wir das in unsere Gleichung für F_y ein, so erhalten wir

$$F_y = 2\rho V_\infty^2 \int_{-r}^{r} \sin^2\theta \,\mathrm{d}x\,.$$

Mit $x = r\cos\theta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_y &= -2\rho V_\infty^2 r \int_{\pi}^{0} \sin^2\theta\, \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\rho V_\infty^2 r \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\rho V_\infty^2 r \left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\rho V_\infty^2 r\,. \end{aligned}$$

Der Baumstamm hebt ab, wenn diese Kraft gleich der Gewichtskraft des Baumstammes ist:

$$\frac{8}{3}\rho V_\infty^2 r = mg$$

und damit

$$V_\infty = \sqrt{\frac{3}{8}\,\frac{mg}{\rho r}}\,.$$

Die Besprechung dieser Aufgaben erfolgt am 19. 06. 2013.