1. **Wurf am Abhang.** Sie stehen an einem Abhang, der den Steigungswinkel α hat, und wollen einen Stein möglichst weit werfen. Unter welchem Winkel ϕ müssen Sie ihn abwerfen? (4 Pkt.)

Lösung: Setze den eigenen Standpunkt als Koordinatenursprung und wähle ein Koordinatensystem wie folgt:

Die vom Stein beschriebene Bahnkurve sei $\vec{r}(t)$, sie erfüllt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}; \tag{1}$$

die Lösung bei Abwurf mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ ist durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 t \cos\phi \\ v_0 t \sin\phi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

gegeben. Der Abhang erfüllt

$$\frac{z}{x} = \tan\alpha, \tag{3}$$

er wird also zur Zeit t_0 mit $z(t_0)/x(t_0) = \tan\alpha$, d.h.

$$-\frac{t_0(v_0 \sin\phi - \frac{1}{2} g t_0)}{t_0 v_0 \cos\phi} = \tan\alpha \rightarrow t_0 = \frac{2v_0}{g}(\sin\phi + \tan\alpha\cos\phi) \tag{4}$$

getroffen. Die Wurfweite w ist dann durch $w = |x(t_0)|$ gegeben, also

$$w(\phi) = \frac{2v_0^2}{g}\left(\sin\phi\cos\phi + \tan\alpha\cos^2\phi\right). \tag{5}$$

Wie zu erwarten, ergibt sich für einen nicht geneigten Hang, $\tan\alpha = 0$, das bekannte Ergebnis für die Wurfweite beim schiefen Wurf.

Um den Winkel $\phi_{\max}$ zu bestimmen, für den w maximal wird, kann man die Ableitung betrachten:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi - 2\tan\alpha\cos\phi\sin\phi\right). \tag{6}$$

Mit $2\cos\phi\sin\phi = \sin(2\phi)$ und $\cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos(2\phi)$ gilt also

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos(2\phi) - \tan\alpha\sin(2\phi)\right), \tag{7}$$

d.h. $\phi_{\max}$ erfüllt

$$\tan(2\phi_{\max}) = \frac{1}{\tan\alpha}. \tag{8}$$

mit der Beziehung

$$tan\alpha = cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

folgt:

$$\phi = \frac{pi}{4} - \frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Für einen nicht geneigten Hang ergibt sich $\tan(2\phi_{\max}) = 0$, d.h. $\phi_{\max} = \pi/4$ (gewöhnlicher schiefer Wurf); für sehr stark geneigte Hänge ($\alpha \to \pi/2$) sind sehr hohe Wurfweiten möglich. Insgesamt ist der optimale Abwurfwinkel stets kleiner als in der Ebene.

2. **Fadenpendel.** Eine Masse m hängt an einem „masselosen" Faden der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde.
   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel φ auf und lösen Sie diese für kleine Auslenkungswinkel. Wie groß ist in diesem Fall die Schwingungsdauer T_{lin}? (2 Pkt.)
   (b) Berechnen Sie für beliebige Auslenkungen die Schwingungsdauer T als Funktion der maximalen Auslenkung φ_0. Zeigen Sie, dass sich $T(\varphi_0)$ als elliptisches Integral erster Art schreiben lässt. (3 Pkt.)
   (c) Entwickeln Sie die Schwingungsdauer T in eine Reihe nach Potenzen von $k = \sin(\varphi_0/2)$. Wie groß ist der prozentuale Fehler der Schwingungsdauer T_{lin}, der durch die Linearisierung der Schwingungsgleichung entsteht, wenn man einen maximalen Auslenkungswinkel von fünf Grad annimmt? (2 Pkt.)

(insgesamt 7 Pkt.)

Lösung:

(a) Die Bahnkurve des Massepunktes ist ein Kreisbogen. Da wir die Reibung vernachlässigen bleibt als einzige wirkende Kraft die Schwere, mit der Komponente $-mg\sin\varphi$. Die exakte Pendelgleichung (mathematisches Pendel) lautet somit

$$ml\ddot{\varphi}(t) + gm\sin\varphi(t) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0\,. \tag{10}$$

Für kleine Winkel $\varphi(t)$ gilt die Näherung $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$. Mit dem Ansatz $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda k}$ erhalten wir für die lineare Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\varphi(t) = 0$$

die charakteristische Gleichung $0 = k^2 + g/l$. Daraus ergeben sich die beiden linear unabhängigen speziellen komplexen Lösungen

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t}\,.$$

Wir suchen allerdings reelle Lösungen von (10). Wegen der Linearität der Gleichung (10) ist jede Linearkombination der speziellen komplexen Lösungen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ gleichfalls eine Lösung von (10). Dies gilt insbesondere für die Linearkombinationen

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right) = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \qquad \text{und}$$

$$\varphi_4(t) = \frac{-\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right) = \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Eine allgemeine reelle Lösung der Schwingungsgleichung ergibt sich aus der Linearkombination von $\varphi_3(t)$ und $\varphi_4(t)$.

$$\varphi(t) = A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

Daraus kann nun die Periodendauer T_{lin} abgelesen werden.

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}T_{\text{lin}} \quad \rightarrow \quad T_{\text{lin}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{11}$$

(b) Um die Periodendauer im Falle großer Schwingungsamplituden zu erhalten, nutze man den Energiesatz $E = V + T$. Im Umkehrpunkt φ_0 verschwindet die kinetische Energie und das Potential V wird maximal, im tiefsten Punkt ist die kinetische Energie T maximal und das Potential $V = 0$. Daher gilt:

$$E = V(\varphi_0) = mgl(1-\cos\varphi_0) = mgl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2$$

und wir erhalten die Differentialgleichung

$$g(1-\cos\varphi_0) = g(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}l\dot{\varphi}^2\,.$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}\,.$$

Um schließlich die Periodendauer zu erhalten, wird über eine Viertelperiode integriert und mit 4 multipliziert.

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \tag{12}$$

Bei der Lösung treten nun einige Probleme auf. Das Integral (12) ist nicht analytisch integrierbar. Die zu integrierende Funktion hat bei φ_0 eine Polstelle. Es ist nicht auf Anhieb erkennbar, ob die Funktion überhaupt im riemannschen Sinne integrabel ist. Sie muss es aber sein, da aus experimenteller Erfahrung bekannt ist, dass die Schwingungsdauer nicht unendlich lang ist. Wegen der fehlenden analytischen Lösung muss die Periodendauer numerisch berechnet werden. Allerdings können wir das Integral (12) auf ein Standardintegral zurückführen.

Zunächst benutzen wir die trigonometrische Beziehung $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2)$, aus der

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}}$$

folgt. Substituieren wir nun noch

$$\begin{aligned}\sin(\varphi/2) &= \sin(\varphi_0/2)\sin u\\ \frac{1}{2}\cos(\varphi/2)\,\mathrm{d}\varphi &= \sin(\varphi_0/2)\cos u\,\mathrm{d}u\,,\end{aligned}$$

so erhalten wir die Periodendauer in der Form

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) .$$

Das Integral $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ heißt vollständiges elliptisches Integral erster Art.

(c) Setzt man $v = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ und leitet $1/\sqrt{1-v\sin^2 u}$ nach v ab, so erhält man die Ableitungen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v\sin^2 u}}\right)'\Bigg|_{v=0} = \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{\left(1-v\sin^2 u\right)^3}}\Bigg|_{v=0} = \frac{\sin^2 u}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v\sin^2 u}}\right)''\Bigg|_{v=0} = \frac{3\sin^4 u}{4\left(1-v\sin^2 u\right)^5}\Bigg|_{v=0} = \frac{3\sin^4 u}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v\sin^2 u}}\right)'''\Bigg|_{v=0} = \frac{15\sin^6 u}{8\sqrt{\left(1-v\sin^2 u\right)^7}}\Bigg|_{v=0} = \frac{15\sin^6 u}{8}$$

Daraus folgt die Potenzreihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-v\sin^2 u}} = 1+\frac{1}{2}v\sin^2 u+\frac{3}{8}v^2\sin^4 u+O(v^3) .$$

Integriert man schließlich, so erhält man für die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{v}{4}+\frac{9v^2}{64}+O(v^3)\right) . \tag{13}$$

Die Periodendauer wächst mit dem maximalen Auslenkwinkel. Setzt man $v = \sin^2\frac{5^\circ}{2}$ an, so erhät man aus (13) bzw. (12)

$$\frac{T_{\text{lin}}}{T} \approx 0{,}9995 .$$

Für kleine Auslenkungswinkel hat die Anharmonizität der Kraft nur sehr kleinen Einfluss auf die Periodendauer. Für einen maximalen Auslenkungswinkel von fünf Grad unterscheiden sich die Periodendauern um weniger als ein Promille.

3. **Bezugssysteme.** Σ und Σ' seien zwei relativ zueinander bewegte Bezugssysteme, in denen kartesische Koordinaten so gewählt sind, das die Achsen beider Koordinatensysteme zueinander parallel sind. Zu einer beliebigen Zeit t werde die Position eines Teilchens in Σ durch (3 Pkt.)

$$\vec{r}(r) = (6b_1t^2 - 4b_2t)\vec{e}_1 - 3b_3t^3\vec{e}_2 + 3b_4\vec{e}_3, \tag{14}$$

und in Σ' durch

$$\vec{r}'(t) = (6b_1t^2 + 3b_2t)\vec{e}_1 - (3b_3t^3 - 11b_5)\vec{e}_2 + 4b_6t\vec{e}_3 \tag{15}$$

gegeben.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich Σ' relativ zu Σ?

(b) Welche Beschleunigungen erfährt das Teilchen in Σ und Σ'?

(c) Σ sei ein Inertialsystem. Ist dann Σ' auch ein Intertialsystem?

Lösung:

(a) Die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{rel}}$ zum Zeitpunkt t ist durch

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r} - \vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}, \tag{16}$$

womit sich

$$\vec{v}_{\text{rel}} = -7b_2\vec{e}_1 - 4b_6\vec{e}_3 \tag{17}$$

ergibt. $\vec{v}_{\text{rel}}$ ist also unabhängig von t – hier kann man schon erkennen, das Σ' ein Inertialsystem ist, wenn Σ eines ist, da sich beide Bezugssysteme gleichförmig gegeneinander bewegen.

(b) Die Beschleunigungen in beiden Bezugssystemen sind gleich, da sie gleichförmig gegeneinander bewegt sind. Natürlich kann man dies auch direkt durch Rechnung verifizieren:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = 12b_1\vec{e}_1 - 18b_3t\vec{e}_2, \\ \vec{a}' &= \ddot{\vec{r}}' = 11b_1\vec{e}_1 - 18b_3t\vec{e}_2. \end{aligned} \tag{18}$$

(c) Die Beschleunigungen in beiden Systemen sind gleich – bewegt sich also ein Teilchen in Σ geradlinig-gleichförmig, so tut es das auch in Σ'. Damit ist Σ' ein Inertialsystem, wenn Σ eines ist. (Umgekehrt natürlich auch!)

4. **Skalentransformation.** Das Potential U sei eine homogene Funktion vom Grad k, mit dem Skalenparamer λ (3 Pkt.)

$$\lambda^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, .., \vec{r}_n) = U(\lambda\vec{r}_1, \lambda\vec{r}_2, .., \lambda\vec{r}_n)$$

Führen sie nun eine Umskalierung durch :

$$\vec{r}_a \rightarrow \lambda\vec{r}_a = \vec{r}_a', \; t \rightarrow \sigma t = t'$$

Stellen sie die Bewegungsgleichung für die skalierten Variablen auf.

Zeigen sie, dass die Aussage des Virialsatz es

$$\langle T \rangle = \frac{k}{2}\langle U \rangle$$

forminvariant unter dieser Reskalierung bleibt.

Wie verhalten sich die Laufzeiten von Körpern mit verschiedenen Massen längs gleicher Bahnen bei gleicher potentieller Energie?
Wie ändern sich die Laufzeiten längs gleicher Bahnen bei Änderung der potentiellen Energie um einen konstanten Faktor?

Lösung:

(a)

$$\dot{\vec{r}}_a' = \frac{\lambda}{\sigma}\dot{\vec{r}}_a, \qquad \ddot{\vec{r}}_a' = \frac{\lambda}{\sigma^2}\ddot{\vec{r}}_a, \qquad \nabla_a' = \frac{1}{\lambda}\nabla_a$$

Für die Kräfte im Potential gilt:

$$r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$$
$$\vec{F}_{ab}' = -\nabla_a' U = \lambda^{k-1}\vec{F}_{ab}$$

Damit gilt für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\lambda}{\sigma^2} m\ddot{\vec{r}}_a = \lambda^{k-1}\sum_{a=1}^{n}\vec{F}_{ab}$$

Diese Gleichung bleibt unverändert, falls gilt:

$$\frac{\lambda}{\sigma^2} = \lambda^{k-1}$$

Das bedeutet, wenn Längen um den Faktor λ verändert werden, ändern sich die Zeiten um den Faktor $\sigma = \lambda^{1-\frac{k}{2}}$

(b) Zu zeigen ist :

$$\langle T' \rangle = \frac{k}{2}\langle U' \rangle.$$

Es gilt

$$\langle T' \rangle = \frac{1}{\tau}\int_o^\tau \frac{d}{dt'}T'dt', \; dt' = \sigma dt, \; T' = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}T$$
$$\langle T' \rangle = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\langle T \rangle$$
$$\langle U' \rangle = \frac{1}{\tau}\int_o^\tau \frac{d}{dt'}U'dt', \; U' = \lambda^k U$$
$$\langle U' \rangle = \lambda^k \langle U \rangle$$

Wegen $\frac{\lambda}{\sigma}^2 = \lambda^{k-1}$ bleibt die Gleichung forminvariant.

(c)

$$t' = \sigma t, \; m' = \lambda m, \; \vec{F}' = -\nabla U = \vec{F}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r}' \cdot m' = F' \to \frac{1}{\sigma^2}\lambda \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot m = \vec{F} \tag{19}$$

demnach gilt :

$$\sigma = \sqrt{\lambda}, \to \underline{\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}}$$

(d)

$$t' = \sigma t,\ U' = \lambda U,\ \vec{F}' = -\nabla U = \lambda \vec{F}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vec{r}'} \cdot m' = \vec{F}' \rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2} \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot m = \lambda \vec{F} \tag{20}$$

es gilt :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}, \rightarrow \underline{\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}}.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **17 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 28. 10. 2008.