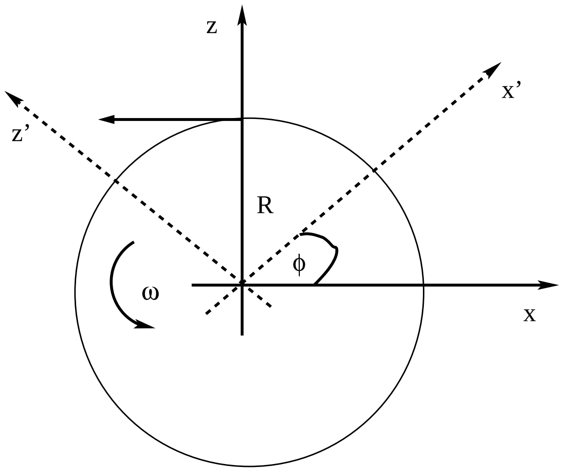
1. **Bewegung im rotierenden System.** Ein Massenpunkt ist zunächst starr mit einer gegen den Uhrzeigersinn mit ω rotierenden Kreisscheibe (Radius R) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $x = 0$, $y = R$ in einem raumfesten Koordinatensystem; die Verbindung zur Kreisscheibe wird nun gelöst. (4 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunkts im raumfesten Koordinatensystem Σ.

   (b) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}'(t)$ des Massenpunkts im mitrotierenden Koordinatensystem Σ' und skizzieren Sie sie.

Lösung:



(a) Im raumfesten System Σ ist die Bewegung geradlinig (keine wirkenden Kräfte!). Es gilt also

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{1}$$

mit $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ und $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = \dot{\vec{r}}(t=0)$. Mit

$$\vec{r}(t=0) = R\vec{e}_z, \text{ und } \vec{v}(t=0) = R\omega\vec{e}_\phi = -R\omega\vec{e}_x \tag{2}$$

ist die Bahnkurve in Σ beschrieben (vgl. Abbildung für die Koordinaten).

(b) Im mitrotierenden System Σ' ist die Bewegung nicht mehr geradlinig, hier wirken ja Trägheitskräfte. Es ist

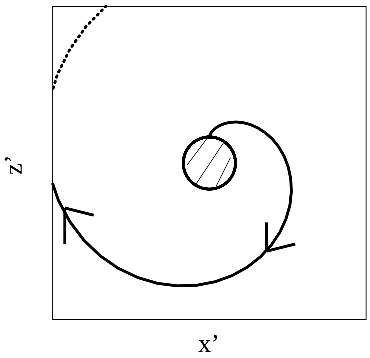
$$m\ddot{\vec{r}}' = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{3}$$

(keine äußeren Kräfte, Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist zeitlich konstant). Die Lösung kann hier ohne direkte Lösung der Differentialgleichung angegeben werden:

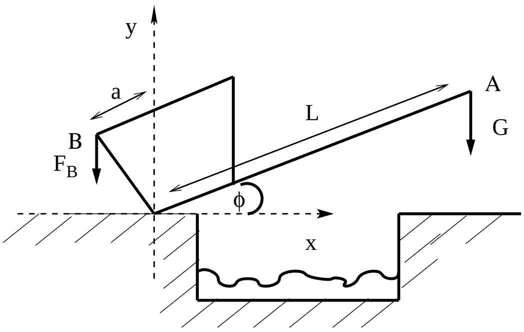
$$x'(t) = x(t)\cos(\omega t) + z(t)\sin(\omega t),\; z'(t) = -x(t)\sin(\omega t) + z(t)\cos(\omega t), \tag{4}$$

also

$$x'(t) = -R\omega t\cos(\omega t) + R\omega\sin(\omega t),\; z'(t) = R\omega t\sin(\omega t) + R\cos(\omega t). \tag{5}$$



2. **Zugbrücke im Gleichgewicht.** Bestimmen Sie für die abgebildete Zugbrückenkonstruktion die Kraft, mit der am Punkt B gezogen werden muss, um die Brücke im Gleichgewicht zu halten. Im Punkt A wirke die Kraft $-G\vec{e}_y$ auf die Brücke. (4 Pkt.)



Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -G\vec{e}_y, \\ \vec{r}_A &= L\cos\phi\vec{e}_x + L\sin\phi\vec{e}_y,\ \vec{r}_B = a\sin\phi\vec{e}_x - a\cos\phi\vec{e}_y, \end{aligned} \tag{6}$$

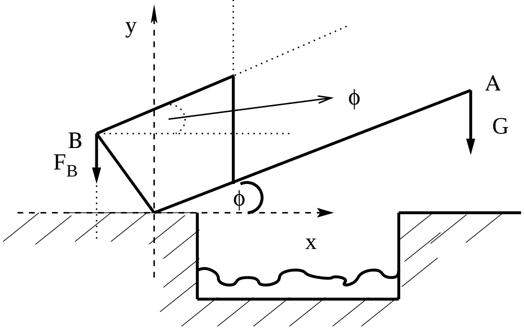
und $\vec{F}_B = -F_B\vec{e}_y$ ist gesucht. Nach dem D'Alembertschen Prinzip gilt im Gleichgewicht

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0, \tag{7}$$

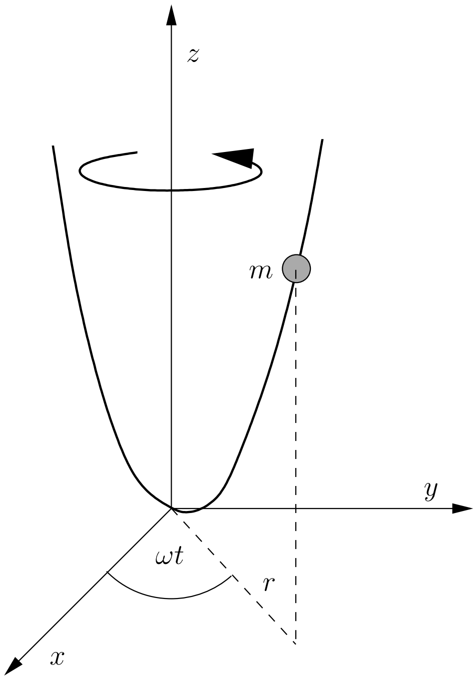
d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{F}_A\delta\vec{r}_A + \vec{F}_B\delta\vec{r}_B \\ &= (-GL\cos\phi + F_B a\cos\phi, \end{aligned} \tag{8}$$

also muss $F_B = GL/a$ sein – die Gleichgewichtsbedingung ist, wie man es natürlich auch haben will, unabhängig vom Aufklappwinkel ϕ.



3. **Perle auf rotierendem Draht.** Auf einem parabelförmige gebogenen Draht, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, gleite eine Perle. Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung.



(a) Wie lauten die Zwangsbedingungen und die d'Alembert-Gleichung? (1 Pkt.)
Stellen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzip's die Bewegungsgleichung auf.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (1 Pkt.)

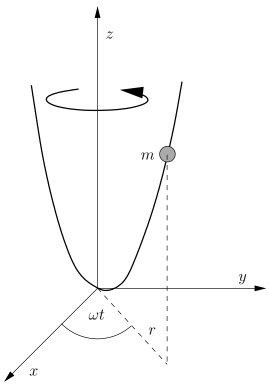
(c) Für welchen Wert ω wirkt die Summe aus Gravitations- und Zentrifugalkraft senkrecht zum Draht? (1 Pkt.)

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a) In Zylinderkoordinaten lauten die Koordinaten des Massenpunktes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} .$$



Da auf der Parabel die Höhe der Perle allein von r abhängt, liefert uns dies die

Zwangsbedingung:

$$z = \alpha r^2 \tag{9}$$

Die d'Alembertgleichung lautet:

$$m(\ddot{r} - g) \cdot \delta r = 0$$

Die Transformationsgleichung :

$$(x, y, z) = (r\cos(\varphi t), r\sin(\varphi t), \alpha r^2)$$

liefert:

$$(\delta x, \delta y, \delta z) = \delta r(cos(\varphi t), sin(\varphi t), 2\alpha r)$$

$$\begin{array}{ll} \ddot{x} & = \ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}sin\omega t - r\omega^2 cos\omega t \\ \ddot{y} & = \ddot{r}\sin\omega t + 2\dot{r}cos\omega t - r\omega^2 sin\omega t \\ \ddot{z} & = 2a\left(\dot{r}^2 + r\ddot{r}\right) \\ \rightarrow & \left((1+4a^2r^2)\ddot{r} + 4a^2r\dot{r}^2 + (2ag - \omega^2)r\right)\delta r = 0 \end{array}$$

(b) Wenn die Summe aus Gravitations- und Zentrifugalkraft senkrecht auf dem Draht steht, heißt das, dass der Massenpunkt in diesem Punkt nicht beschleunigt wird ($\ddot{r} = 0$), falls er sich in diesem Punkt befindet und $\dot{r} = 0$ gilt. Damit erhalten wir sofort aus der Bewegungsgleichung als Bedingung dafür die triviale Lösung $r(t) \equiv 0$ oder

$$\omega^2 - 2ag \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \pm\sqrt{2ga}\,.$$

Für $r = 0$ ist die resultierende Kraft immer senkrecht zum Draht, da hier nur die Gravitation wirkt. Die Gleichung für ω ist für jeden Wert von r identisch. Das bedeutet, dass der Massenpunkt für diese Winkelgeschwindigkeit auf jedem Punkt der Parabel nicht beschleunigt wird, falls er sich nicht entlang des Drahtes bewegt.

(c) Um die Differentialgleichung zu lösen, multiplizieren wir sie mit $\dot{r}$, woraus sich

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\dot{r}\ddot{r}}_{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}^2)} + 4a^2\left(\underbrace{r^2\dot{r}\ddot{r} + \dot{r}r\dot{r}^2}_{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{r}^2)}\right) - \underbrace{r\dot{r}}_{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2}(\omega^2 - 2ga) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+4a^2r^2)\dot{r}^2 - (\omega^2 - 2ag)r^2\right) \end{aligned}$$

ergibt. Da die Ableitung Null ist, ist die Funktion eine Konstante, die wir hier mit c bezeichnen wollen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}r\sqrt{\frac{1+4a^2r^2}{c + (\omega^2 - 2ag)r^2}}\,.$$

Integrieren beider Seiten liefert sofort

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r(t)} \mathrm{d}r' \sqrt{\frac{1+4a^2r'^2}{c + (\omega^2 - 2ag)r'^2}}\,.$$

4. **Senkrechter Wurf mit Corioliskraft.** Ein Körper der Masse m befinde sich an einem Ort der geographischen Breite φ. Das Gravitationsfeld der Erde kann als homogen angesehen werden. Die Erde rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Das System, in dem der Erdmittelpunkt ruht, sei ein Inertialsystem und Reibung sei vernachlässigbar. (2 Pkt.)

   Der Körper werde vom Boden mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschossen. Wie weit vom Abschusspunkt entfernt landet er? In welche Richtung ist er abgelenkt worden? Erläutern Sie warum.

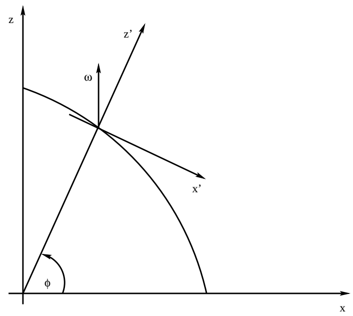
   Hinweis: Vernachlässigen Sie bei der Rechnung Terme $\sim \omega^2$. (insgesamt 2 Pkt.)

Lösung: Das Laborsystem auf der Erde ist ein beschleunigtes Bezugssystem mit dem Koordinaten x', y', z'. Der Koordinatenursprung dieses Systems bewegt sich aufgrund der Erdrotation in die Zeicheneben hinein. Dies sei auch die Richtung der y'- Achse. Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich auf der Erdoberfläche zu

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\varphi \\ 0 \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix} .$$

Hierbei ist φ die geographische Breite. Nahe der Erdoberfläche betrachten wir die Zentrifugalkraft nicht gesondert, sondern betrachten $m\vec{g}$ als Summe aus Gravitation und Zentrifugalkraft. In Komponenten lautet die Bewegungsgleichung damit

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega\dot{y}'\sin\varphi \\ -2\omega(\dot{z}'\cos\varphi + \dot{x}'\sin\varphi) \\ 2\omega\dot{y}'\cos\varphi - g \end{pmatrix}$$



Die lineare Beschleunigungskraft $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$ können wir an dieser Stelle vernachlässigen, da für die Dauer des Vorganges die Erdrotation nahezu konstant ist. Zuerst integrieren wir $\ddot{x}'$ und $\ddot{y}'$ und erhalten

$$\dot{x}' = 2\omega\sin(\varphi)y' + c_1$$

und

$$\dot{y}' = -2(\omega\sin(\varphi)x' + \omega\cos(\varphi)z') + c_2 .$$

In diesem Fall lauten die Anfangsbedingungen für $t = 0$ $x' = y' = z' = 0$, $\dot{x}' = \dot{y}' = 0$ und $\dot{z}' = v_0$. Damit ergibt sich als Lösung der Bewegungsgleichung für $z'(t)$

$$z'(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t .$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\dot{y}'(t) = 2\omega g t \cos(\varphi) - 2\omega v_0 \cos(\varphi) .$$

und

$$y'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos(\varphi) - \omega v_0 t^2 \cos(\varphi) .$$

Die Zeit, an der der Körper wieder den Boden erreicht, ergibt sich aus $z'(t_0) = 0$ und lautet $t_0 = \frac{2v_0}{g}$. Daraus ergibt sich eine Abweichung von

$$y(t_0) = -\frac{4}{3}\omega \cos(\varphi)\frac{v_0^3}{g^2} .$$

Die Gleichung für $\ddot{x}'$ ist in unserer Näherung erneut identisch Null. Wir sehen, dass die Abweichung in diesem Fall in westliche Richtung erfolgt. Grund dafür ist die anfängliche Ablenkung des Körpers in westliche Richtung. Bei der Aufwärtsbewegung ist dies nicht weiter verwunderlich. Am höchsten Punkt der Bahn hat der Körper also eine Geschwindigkeit in westlicher Richtung. Die Corioliskraft stoppt im zweiten Teil der Flugbahn diese Bewegung wieder, kann aber die Abweichung nicht kompensieren. Wie man leicht verifizieren kann, ist $\dot{y}'(t_0) = 0$. Das heißt der Körper hat während der gesamten Flugphase eine Geschwindigkeitskomponente in westlicher Richtung. Dies führt zur Abweichung in diese Richtung.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **13 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 4. 11. 2008.