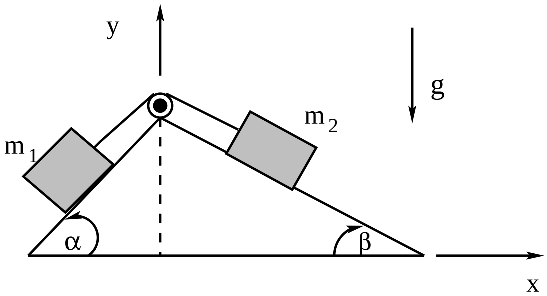
1. **Teilchen in Honig.** Eine Kugel mit Masse m und Radius r fällt in einem Gefäß, das mit Honig gefüllt ist und in einen homogenen Gravitationsfeld steht, vertikal nach unten. Die dabei auftretende Reibung kann als Stokes-Reibung angenommen werden, d.h. $\vec{F}_r = -6\pi r\eta\vec{v}$. (4 Pkt.)

   Bestimmen Sie die Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und lösen Sie die daraus folgenden Lagrange-Gleichungen für $v(t=0)=0$, $z(t=0)=z_0$.

2. **2 Massen gleiten auf schiefen Ebenen.** Zwei Massen m_1 und m_2 sollen reibungsfrei auf einer Doppelschiefebene gleiten und durch einen Faden der Länge l über eine Rolle verbunden sein (siehe Abbildung). Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen y-Achse ($g = -ge_y$). Betrachten Sie dabei beide Massen als punktförmig, die endliche Ausdehnung der Massen und der Umlenkrolle dienen nur der graphischen Darstellung und sollen vernachlässigt werden.



   (a) Leiten sie die Bewegungsgleichung für x_1 mit Hilfe von Lagrange I her. (2 Pkt.)

   (b) Leiten sie die Bewegungsgleichung für x_1 mit Hilfe von Lagrange II her. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. (2 Pkt.)

   (insgesamt 4 Pkt.)

3. **Lagrange-Formalismus in der Ökonomie.** Der Lagrange-Formalismus kann allgemein zur Lösung von Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen verwendet werden. Solche treten nicht nur in der Physik auf, sondern auch z.B. in den Wirtschaftswissenschaften. (2 Pkt.)

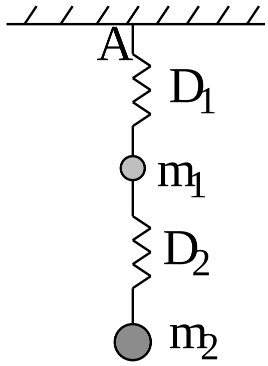
   Betrachten Sie eine Person A, die genau zwei Güter g_1, g_2 konsumieren kann, die die Preise p_1, p_2 haben. Die Person hat zum Konsum ein Budget B, das vollständig ausgegeben werden muss; sie darf aber auch keine Schulden machen. Der Nutzen, den sie vom Konsum hat, sei $U(g_1, g_2)$. Gesucht sind nun g_1^*, g_2^* so, dass U maximiert wird.

   (a) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf. Was ist die Bedeutung des Lagrange-Multiplikators λ? (*Hinweis*: Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen $\mathrm{d}U/\mathrm{d}B$!)

   (b) Sei nun konkret $U(g_1, g_2) = g_1^{0.2} g_2^{0.8}$, $p_x = 5€$, $p_y = 10€$und $B = 100€$. Bestimmen Sie die optimalen Stückzahlen der Konsumgüter g_1, g_2.

4. **Schwingungstilger.** (2 Pkt.)

Betrachten Sie das skizzierte System. Der Aufhängungspunkt A eines Systems führt vertikale, harmonische Schwingungen durch: $x_A(t) = A\cos(\Omega t)$. Auf beide Massen wirken die Federkräfte und durch die Luft erzeugte Reibungskräfte, die als $R_i = -c_i\dot{x}_i$ angenommen werden können. Zeigen Sie, dass die Masse m_1 nach dem Einschwingen nahezu in Ruhe bleibt, wenn $\Omega = \sqrt{D_2/m_2}$ und c_2 sehr klein ist. Erklären Sie, wie dieser Effekt zustande kommt.
Hinweis: Arbeiten Sie mit komplexen Ansätzen, d.h. setzen Sie zunächst $x_A(t) = Ae^{i\Omega t}$ an und betrachten erst später Real- und Imaginärteile.



Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 11. 11. 2008.