1. **Teilchen in Honig.** Eine Kugel mit Masse m und Radius r fällt in einem Gefäß, das mit Honig gefüllt ist und in einen homogenen Gravitationsfeld steht, vertikal nach unten. Die dabei auftretende Reibung kann als Stokes-Reibung angenommen werden, d.h. $\vec{F}_r = -6\pi r\eta\vec{v}$. (4 Pkt.)

   Bestimmen Sie die Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und lösen Sie die daraus folgenden Lagrange-Gleichungen für $v(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = z_0$.

Lösung: Die Dissipationsfunktion ist

$$D = \int_0^v \mathrm{d}v' h(v') = -6\pi r\eta \int_0^v \mathrm{d}v' v' = -3\pi r\eta v^2. \tag{1}$$

Im folgenden sei $\alpha = -6\pi r\eta$.

Die Kugel falle entlang der z-Achse nach unten, d.h. $v = -\dot{z}$. Die Lagrange-Funktion ist

$$L(z, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz, \tag{2}$$

woraus die Lagrangegleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 0 \\ &\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{z} + mg + \alpha\dot{z} = 0 \\ &\to m\ddot{z} + mg + \alpha\dot{z} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

folgt. Diese kann als Differenzialgleichung für $v = -\dot{z}$ umgeschrieben und durch Trennung der Variable gelöst werden:

$$\dot{v} = g - \frac{\alpha}{m}v \to t - t_0 = -\frac{m}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha v - mg}{\alpha v_0 - mg}\right). \tag{4}$$

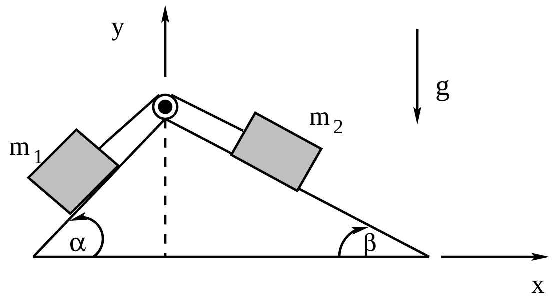
Mit $t_0 = 0$ und der Anfangsbedingung $v_0 = 0$ gilt also

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)\right), \tag{5}$$

und damit

$$z(t) = z_0 - \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') = z_0 + \frac{mg}{\alpha}\left(t + \frac{m}{\alpha}\exp\left(\frac{-\alpha t}{m}\right)\right). \tag{6}$$

2. **2 Massen gleiten auf schiefen Ebenen.** Zwei Massen m_1 und m_2 sollen reibungsfrei auf einer Doppelschiefebene gleiten und durch einen Faden der Länge ℓ über eine Rolle verbunden sein (siehe Abbildung). Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen y-Achse ($g = -ge_y$). Betrachten Sie dabei beide Massen als punktförmig, die endliche Ausdehnung der Massen und der Umlenkrolle dienen nur der graphischen Darstellung und sollen vernachlässigt werden.



(a) Leiten sie die Bewegungsgleichung für x_1 mit Hilfe von Lagrange I her. (2 Pkt.)

(b) Leiten sie die Bewegungsgleichung für x_1 mit Hilfe von Lagrange II her. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. (2 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Wir legen das Koordinatensystem in die Mitte der Rolle; o.b.d.A wird $x_1, y_1, y_2 < 0$ und $x_2 > 0$ gewählt.

Die Zwangsbedingungen für dieses Problem lauten:

$$g_1 = \frac{-x_1}{\cos(\alpha)} + \frac{x_2}{\cos\beta} = \ell, \qquad g_2 = y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha) = 0, \qquad g_3 = y_2 + x_2 \cdot \tan(\beta) = 0$$

Dies setzen wir in die folgende Bewegungsgleichung ein:

$$m_n \cdot \ddot{x}_n = F_n + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n}.$$

Dies liefert uns die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \tfrac{-1}{\cos(\alpha)}\lambda_1 - \lambda_2 \tan(\alpha), & m_2\ddot{x}_2 &= \tfrac{1}{\cos(\beta)}\lambda_1 + \lambda_3 \tan(\beta), \\ m_1\ddot{y}_1 &= \lambda_2 - m_1 g, & m_2\ddot{y}_2 &= \lambda_3 - m_2 g \end{aligned}$$

Außerdem ergeben sich über zweifache ableitung der Zwangsbedingungen folgende Gleichungen:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 \tan(\alpha),\ \ddot{y}_2 = -\ddot{x}_2 \tan(\beta),\ \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$

Lösung dieses Systems liefert

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g \cos(\alpha) \frac{-m_1 \sin(\alpha) + m_2 \sin(\beta)}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

(b) Um die Lagrangegleichung aufzustellen, bestimmen wir die kinetische und die potentielle Energie:

$$T = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

mit $y_1 = x_1 \tan\alpha$,$y_2 = -x_2 \tan(\beta)$ und der Zwangsbedingung g_1 finden wir die Lagrangegleichung L=T-U:

$$L(x_1, \dot{x}_1) = \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1^2}{\cos^2(\alpha)}\right) - m_1 x_1 g \tan(\alpha) + m_2 g x_1 \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$

Hierbei wurde jeder auftauchende konstante Term im Potential = 0 gesetzt! Aus der Lagrangegleichung erhalten wir nun über $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$ die gesuchte Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}_1 = g\cos(\alpha)\frac{-m_1\sin(\alpha) + m_2\sin(\beta)}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung liefert eine gradlinig beschleunigte Bewegung.

3. **Lagrange-Formalismus in der Ökonomie.** Der Lagrange-Formalismus kann allgemein zur Lösung von Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen verwendet werden. Solche treten nicht nur in der Physik auf, sondern auch z.B. in den Wirtschaftswissenschaften. (2 Pkt.)

Betrachten Sie eine Person A, die genau zwei Güter g_1, g_2 konsumieren kann, die die Preise p_1, p_2 haben. Die Person hat zum Konsum ein Budget B, das vollständig ausgegeben werden muss; sie darf aber auch keine Schulden machen. Der Nutzen, den sie vom Konsum hat, sei $U(g_1, g_2)$. Gesucht sind nun g_1^*, g_2^* so, dass U maximiert wird.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf. Was ist die Bedeutung des Lagrange-Multiplikators λ? (*Hinweis*: Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen $\mathrm{d}U/\mathrm{d}B$!)

(b) Sei nun konkret $U(g_1, g_2) = g_1^{0.2} g_2^{0.8}$, $p_x = 5€$, $p_y = 10€$und $B = 100€$. Bestimmen Sie die optimalen Stückzahlen der Konsumgüter g_1, g_2.

Lösung:

(a) Die Nebenbedingung ist $B = p_1 g_1 + p_2 g_2$ (holonome Zwangsbedingung); die Langrangefunktion ist damit $L(g_1, g_2, \lambda) = U(g_1, g_2) - \lambda(p_1 g_1 + p_2 g_2 - B)$. Damit lauten die Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial g_1} &= \frac{\partial U}{\partial g_1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial g_2} &= \frac{\partial U}{\partial g_2} - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (B - p_1 g_1 - p_2 g_2) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \frac{\partial U}{\partial g_1}\mathrm{d}g_1 + \frac{\partial U}{\partial g_2}\mathrm{d}g_2 \\ &= \lambda p_1 \mathrm{d}g_1 + \lambda p_2 \mathrm{d}g_2, \end{aligned} \tag{10}$$

aus der dritten $\mathrm{d}B = p_1\mathrm{d}g_1 + p_2\mathrm{d}g_2$, also insgesamt $\mathrm{d}U/\mathrm{d}B = \lambda$. Damit kann man λ als den sogenannten *Grenznutzen* interpretieren: Wird das Bugdet um $\mathrm{d}B$ erhöht, steigt der Nutzen gerade um λ.

(b) Hier lauten die Lagrange-Gleichungen

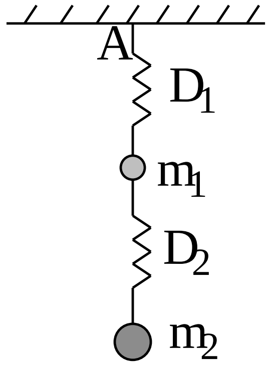
$$\begin{aligned} &0.2 g_1^{0.2} g_2^{-0.2} - 5\lambda = 0, \\ &0.8 g_1^{0.2} g_2^{-0.2} - 10\lambda = 0, \\ &-5 g_1 - 10 g_2 + 100 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Daraus ergibt sich

$$g_1 = 2,\ g_2 = 8,\ \lambda = 10. \tag{12}$$

4. **Schwingungstilger.** (2 Pkt.)

Betrachten Sie das skizzierte System. Der Aufhängungspunkt A eines Systems führt vertikale, harmonische Schwingungen durch: $x_A(t) = A\cos(\Omega t)$. Auf beide Massen wirken die Federkräfte und durch die Luft erzeugte Reibungskräfte, die als $R_i = -c_i \dot{x}_i$ angenommen werden können. Zeigen Sie, dass die Masse m_1 nach dem Einschwingen nahezu in Ruhe bleibt, wenn $\Omega = \sqrt{D_2/m_2}$ und c_2 sehr klein ist. Erklären Sie, wie dieser Effekt zustande kommt.
Hinweis: Arbeiten Sie mit komplexen Ansätzen, d.h. setzen Sie zunächst $x_A(t) = Ae^{i\Omega t}$ an und betrachten erst später Real- und Imaginärteile.



Lösung: Seien x_1, x_2 die Auslenkungen der Massen m_1, m_2 aus ihren jeweiligen Ruhelagen. Die kinetische Energie des Gesamtsystems ist dann

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2. \tag{13}$$

Die potentiellen Energien fr m_1, m_2 ergeben sich aus dem Potential der Federkräfte, $V = -D\Delta x^2/2$, wobei D die Federkonstante und Δx der Abstand der Masse zur Ruhelage ist. Also:

$$V = \frac{D_1}{2}\left(x_1 - Ae^{i\Omega t}\right)^2 + \frac{D_2}{2}(x_1 - x_2)^2; \tag{14}$$

Die Dissipationsfunktion ist

$$D = \frac{c_1}{2}\dot{x}_1 + \frac{c_2}{2}\dot{x}_2. \tag{15}$$

Wir setzen im folgenden gleich $\Omega = \sqrt{D_2/m_2}$ ein. Aus der Lagrangefunktion ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{D_1}{m_1}\left(x_1 - Ae^{i\sqrt{D_2/m_2}t}\right) + \frac{D_2}{m_1}(x_1 - x_2) = 0 \\ &\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{D_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Gleichung (**??**) ist ein inhomogenes Differenzialgleichungssystem; die Lösung setzt sich also aus allgemeiner homogener und spezieller Lösung zusammen. Die homogene Lösung beschreibt das bekannte Verhalten eines gedämpften Schwingers; sie klingt also schnell ab – und beschreibt damit das *Einschwingen* des Systems. Da hier nur der Zustand nach dem Einschwingvorgang, d.h. für Zeiten, zu denen die homogene Lösung schon abgeklungen ist, interessiert, suchen wir nur eine spezielle Lösung. Diese wird mit der Erregerfrequenz Ω schwingen, jedoch eventuell phasenverschoben zur Erregung, also

$$x_i(t) = a_i e^{i\Omega t - \alpha_i} = a_i e^{i\sqrt{D_2/m_2}t - \alpha_i}. \tag{17}$$

Einsetzen in Gl. (16) liefert

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{D_2}{m_2} + i\frac{c_1}{m_1}\sqrt{\frac{D_2}{m_2}} + \frac{D_1 + D_2}{m_1}\right) a_1 e^{-i\alpha_1} - \frac{D_1}{m_1}A - \frac{D_2}{m_2}a_2 e^{-i\alpha_2} = 0 \\ &i\frac{c_2}{m_2}\sqrt{\frac{D_2}{m_2}}a_2 e^{-i\alpha_2} - \frac{D_2}{m_2}a_1 e^{-i\alpha_1} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt, wenn beide Größen von Betrag und Phase her gleich sind:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},\ a_1 = \frac{c_2}{\sqrt{m_2 D_2}} a_2. \tag{19}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$a_2 = \frac{D_1 A \sqrt{D_2 m_2}}{c_2 m_1 \sqrt{G^2 + H^2}},\ \tan \alpha_1 = \frac{G}{H}, \tag{20}$$

mit

$$G = \frac{D_1 + D_2}{m_1} - \frac{D_2}{m_2},\ H = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{D_2 m_2}{m_1 c_2} \right). \tag{21}$$

Wegen $a_1 \sim c_2$ ist die Dämpfung der Schwingung von m_1 für kleine c_2 besonders gut. Dann gilt auch $\alpha_1 \approx \pi/2$, $\alpha_2 \approx \pi$, d.h. m_1 ist nahezu in Ruhe, m_2 schwingt gegenphasig zur Erregung – die Federkräfte auf m_1 (von der Aufhängung und von m_2) kompensieren sich also nahezu.

Das Ganze funktioniert natürlich nur, wenn die Erregungsfrequenz konstant und gut abgestimmt ist!

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 11. 11. 2008.