1. **Strecke auf Zylinder.** Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf dem Zylinder. (2 Pkt.)

Lösung:

(a) Für das Funktional gilt:

$$\begin{aligned} s := F[z] &= \int_{P_1}^{P_2} ds \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(d\phi)^2 + (dz)^2} \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + z'^2} d\phi \qquad \text{mit z=z}(\phi). \end{aligned}$$

$$\rightarrow F(z, z', \phi) = \sqrt{r^2 + z'^2}.$$

es gilt nun :

$$\frac{d}{d\phi}\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{1}$$

Da F nicht explizit von z abhängt, muss die partielle Ableitung nach z' gleich einer Konstanten sein:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial z'} &= C_1. \\ \tfrac{2z'}{\sqrt{r^2+z'^2}} &= C_1 \\ \rightarrow z &= C_2\phi + C_3 \end{aligned}$$

2. **Eine Lagrangefunktion.** Ein Teilchen der Masse m habe folgende Lagrangefunktion: (4 Pkt.)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{\omega}{2} L_z,$$

wobei L_z die z-Komponente des Drehimpulses sein soll.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die zugehörigen Erhaltungsgrößen, und zu welchen Symmetrien gehören sie?

(b) Bilden Sie nun die Hamilton-Funktion. Welcher physikalischen Größe entspricht sie? Ist sie erhalten?

(c) Wiederholen Sie die Rechnung in Zylinderkoordinaten. Welche Vaiablen sind hier zyklisch? Was sind die zugehörigen Erhaltungsgrößen, und zu welchen Symmetrien gehören sie?

Lösung:

(a) Mit $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ lauten die Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - \omega m\dot{y} = 0, \\ &m\ddot{y} + \omega m\dot{x} = 0, \\ &m\ddot{z} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $\partial L/\partial z = 0$ ist z zyklisch; $m\dot{z}$, also die z-Komponente des kinematischen Impulses, ist erhalten. Dem entspricht die Translationsinvarianz der Lagrangefunktion in z-Richtung: Eine Transformation $z \to z + a$ ändert L nicht.

(b) Es ist

$$H = \sum_j \left(\dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - L, \tag{3}$$

also hier

$$\begin{aligned} H = &\left(m\dot{x}^2 - \frac{m\omega}{2} y\dot{x} \right) + \left(m\dot{y}^2 + \frac{m\omega}{2} x\dot{y} \right) + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{m\omega}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) \\ = &\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \end{aligned} \tag{4}$$

H entspricht hier der kinetischen Energie des Teilchens. Da die Lagrangefunktion nicht von t abhängt, ist H erhalten.

(c) In Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{m\omega}{2} r\dot{\phi}. \tag{5}$$

Hier ergeben sich die Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} &m\ddot{r} - m\dot{\phi}r = 0, \\ &m\dot{r}\left(\dot{\phi} + \frac{\omega}{2}\right) + mr\ddot{\phi} = 0, \\ &m\ddot{z} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Hier ist neben z auch noch ϕ zyklisch. Wir erkennen, das außer der Translationsinvarianz in z-Richtung auch noch Rotationssysmmetrie um die z-Achse vorliegt; dazu gehört die Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses.

3. **Symmetrietransformation beim harm. Oszillator.** Zeigen Sie, dass die Transformation $x \to x' = x + \alpha \cos \omega t$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist und berechnen Sie die dazugehörige Erhaltungsgröße. (2 Pkt.)

Lösung: Die Lagrange-funktion des harmonischen Oszillators lautet:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2. \tag{7}$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion in gestrichenen Variablen:

$$\begin{aligned} L'(x', \dot{x}', t) &= \tfrac{m}{2}\left(\dot{x}' + \alpha\omega \sin(\omega t)\right)^2 - \tfrac{D}{2}\left(x' - \alpha\cos(\omega t)\right)^2 \\ &= \tfrac{m}{2}\dot{x}'^2 - \tfrac{D}{2}x'^2 + \tfrac{d}{dt}F(x', t, \alpha). \end{aligned}$$

mit $F(x', t, \alpha) := \alpha m\omega x' \sin(\omega t) + \alpha^2 f(t)$.
Die Form von $f(t)$ ist uninteressant, da $f(t)$ mit α^2 multipliziert wird und deshalb bei

der Differentiation an der Stelle $\alpha = 0$ wegfällt.Die Erhaltungsgröße ist

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \left((x' - \alpha \cos(\omega t) \right)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \,|_{\alpha=0} = -m \left(\dot{x} \cos\left(\omega t\right) + \omega x \sin\left(\omega t\right) \right). \tag{8}$$

4. **Seifenhaut.** Eine Seifenhaut ist bestrebt, eine Form einzunehmen, die ihre Oberfläche minimiert und kompatibel mit den gegebenen Randbedingungen ist. (4 Pkt.)

   Bei $-x_0$ und x_0 befinden sich zwei in der y-z-Ebene parallel ausgerichtete Kreisringe mit dem Radius R. Zwischen den Ringen befindet sich eine Seifenhaut, die aus Symmetriegründen eine rotationssymmetrische Form einnimmt.

   (a) Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$, die die Rotationsfläche vollständig bestimmt.

   (b) Es kann sich nicht für beliebige Verhältnisse von R und x_0 eine Seifenhaut zwischen den Ringen ausbilden. Ermitteln Sie auf graphischem Wege das kritische Verhältniss von R und x_0, bei dem sich gerade noch eine stabile Seifenhaut zwischen den Ringen ausbilden kann. Warum erhalten wir mehr als eine stationäre Kurve $y = y(x)$, die die Randbedingungen erfüllt? Wer zeigen kann, welche stationäre Kurve die gesuchte ist, erhält einen Extrapunkt.

   (c) Wie groß ist die Fläche O_S der Seifenhaut? Vergleichen Sie diese mit der Größe des Mantels O_M des Zylinders zwischen den beiden Kreisringen. Wie müssen Sie x_0 und R wählen, damit das Verhältnis O_S/O_M minimal wird? Wie groß ist dann dieses Verhältnis?

Lösung:

(a) Die Oberfläche eines Rotationskörpers beträgt

$$O = 2\pi \int_{-x_0}^{x_0} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, y') = y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \tag{9}$$

hängt nicht explizit von der Variablen x ab. Daraus folgt, dass

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = y \cdot \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y \cdot y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

eine Erhaltungsgröße ist. Mit anderen Worten: Wir erhalten eine der beiden Integrationen, die notwendig ist, um

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

zu lösen, umsonst. Gleichung (9) nach y' umgestellt, ergibt

$$y' = \pm \frac{\sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir mit der neuen Integrationskonstanten $c_1 c_2$ die beiden Integrale

$$\int \mathrm{d}x + c_1 c_2 = \pm \int \frac{c_1\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} \,.$$

Mit der Substitution $y = c_1 \cosh u$, $\mathrm{d}y = c_1 \sinh u\,\mathrm{d}u$ folgt weiter

$$\begin{aligned} x + c_1 c_2 &= \pm \int \frac{c_1 \sinh u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{c_1^2 \cosh^2 u - c_1^2}} \\ &= \pm \int c_1\,\mathrm{d}u = \pm c_1 u = \pm c_1 \operatorname{arccosh}(y/c_1) \,. \end{aligned}$$

Umstellung nach y ergibt schließlich

$$y = c_1 \cosh\left[\pm\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right)\right] \,.$$

Das negative Vorzeichen können wir von nun an ignorieren, da cosh eine gerade Funktion ist.

Bleiben noch die beiden Integrationskonstanten $c_{1,2}$ zu bestimmen. Die (symmetrischen) Randbedingungen fordern

$$c_1 \cosh\left(\frac{x_0}{c_1} + c_2\right) = c_1 \cosh\left(-\frac{x_0}{c_1} + c_2\right) \,,$$

was, da cosh eine gerade Funktion ist, nur mit $c_2 = 0$ erfüllt werden kann. Die Integrationskonstante c_1 folgt aus

$$R = c_1 \cosh \frac{x_0}{c_1} \,. \tag{10}$$

(b) Die letzte Gleichung können wir mit der Variablen $p = x_0/c_1$ auch als

$$\cosh p = \frac{R}{x_0} p \tag{11}$$

schreiben. Diese transzendente Gleichung können wir nur numerisch oder graphisch lösen, siehe Abbildung 1. Ob diese Gleichung eine Lösung besitzt und wieviele dies sind, hängt vom Verhältnis $\beta = R/x_0$ ab. Oberhalb eines kritischen Wertes β_c erhalten wir zwei Lösungen p_1 und p_2, bei dem kritischen Wert eine Lösung p_c und darunter keine. Sind die beiden Ringe zu weit auseinander, kann sich keine stabile Seifenhaut ausbilden.

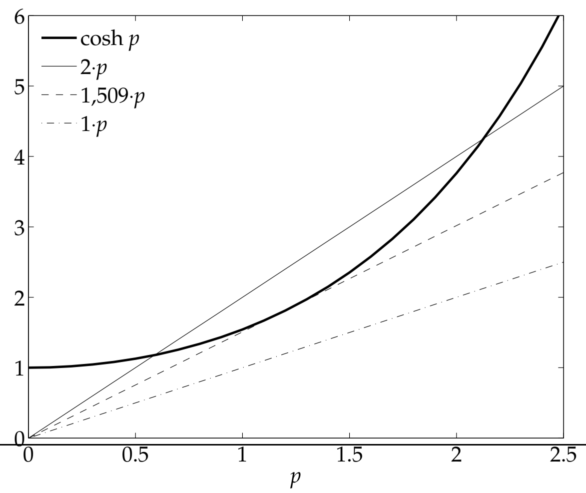

Abbildung 1: Graphische Bestimmung des Paramerters p.

Wie groß ist dieses kritische Verhältnis β_c? Im kritischen Punkt sind die Anstiege auf beiden Seiten von (11) gleich.

$$\sinh p_c = \beta_c \tag{12}$$

Mit (11) folgt daraus eine Bestimmungsgleichung für p_c

$$\tanh p_c = \frac{1}{p_c}\,,$$

deren graphische oder numerische Lösung den Wert $p_c = 1{,}19968$ ergibt, sieheAbbildung 2. Mit (12) folgt $\beta_c = 1{,}50888$.

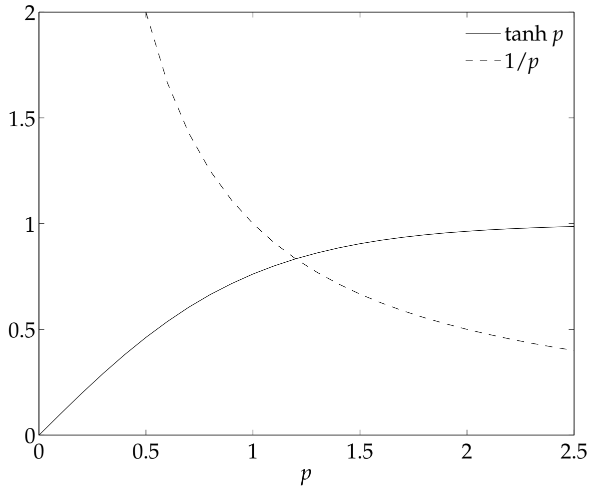

Abbildung 2: Graphische Bestimmung des kritischen Paramerters p_c.

(c) Die Seifenblase hat eine Oberfläche von

$$\begin{aligned} O_S &= 2\pi \int_{-x_0}^{x_0} c_1 \cosh \frac{x}{c_1} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{c_1}}\, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-x_0}^{x_0} c_1 \cosh^2 \frac{x}{c_1}\, \mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} &= \pi c_1 \left(c_1 \cosh \frac{x}{c_1} \sinh \frac{x}{c_1} + x \right) \Bigg|_{-x_0}^{x_0} \\ &= 2\pi c_1 \left(c_1 \cosh \frac{x_0}{c_1} \sinh \frac{x_0}{c_1} + x_0 \right)\,. \end{aligned}$$

Je weiter sich die Ring auseinander bewegen, desto stärker dellt sich die Seifenblase ein. Im Vergleich zum Zylindermantel, muss das Verhältnis O_S/O_M also im kritischen Abstand minimal werden. Wegen (10) lässt sich die Oberfläche auch als

$$\begin{aligned} O_S &= 2\pi R x_0 \left(\frac{\sinh x_0/c_1}{x_0/c_1} + \frac{1}{(x_0/c_1)(R/x_0)} \right) \\ &= 2\pi R x_0 \left(\frac{\sinh p}{p} + \frac{1}{p\beta} \right) \end{aligned}$$

schreiben. Mit den kritischen Parametern p_c und β_c und (12) folgt

$$O_S = 2\pi R x_0 \left(\frac{\beta_c}{p_c} + \frac{1}{p_c \beta_c} \right) .$$

Der Ausdruck in den Klammern ergibt den numerischen Wert 1,81017. Das Verhältnis O_S/O_M ist somit 0,90509.

Wir haben gesehen, dass es zwei extremale Lösungskurven gibt. Zur Erinnerung: Die Euler-Lagrange-Gleichung geben uns extremale Kurven, dabei kann es sich im Maxima, Minima oder Sättel handeln. Der Charaker der Extrema muss extra bestimmt werden. Numerischen finden wir, dass die kleinere der beiden Lösungen p_1 und p_2 die Oberfläche minimiert.

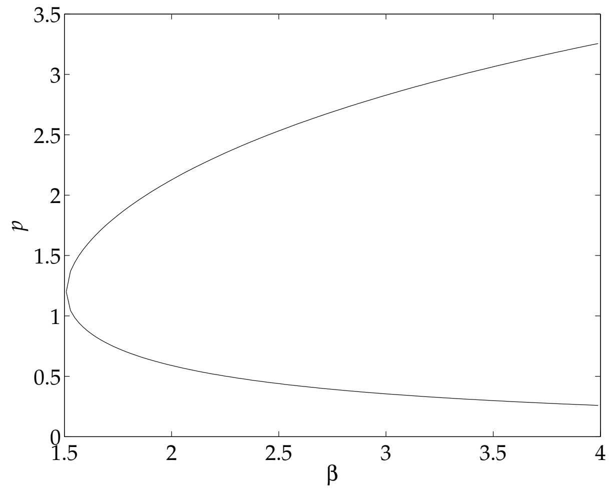

Abbildung 3: Lösungen der Parameter p in Abhänigkeit von $\beta = R/x_0$.

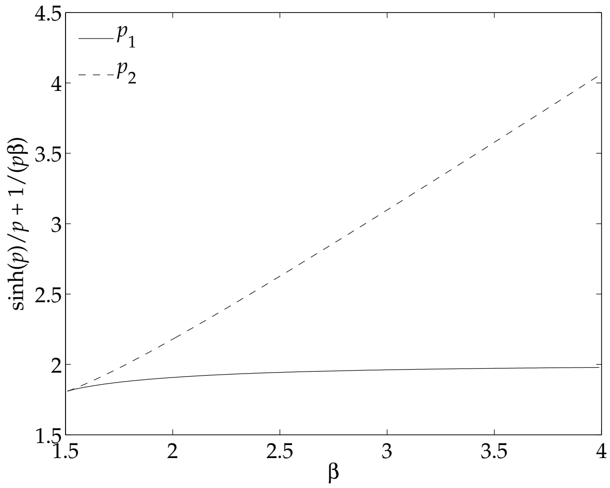

Abbildung 4: Relative Oberfläche für die beiden Parameter p_1 und p_2, $p_1 < p_2$.

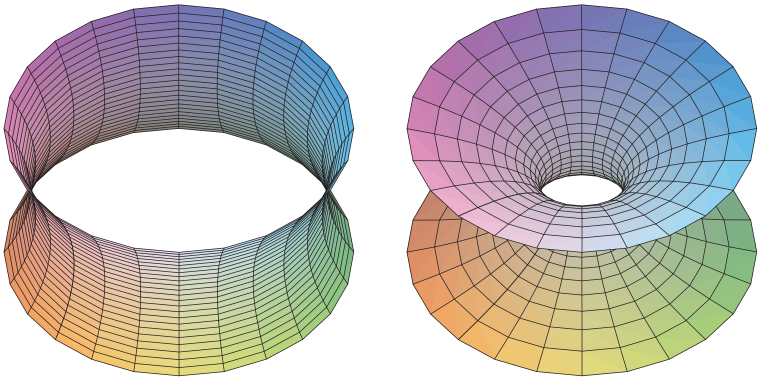

Abbildung 5: Zwei Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen, die die Randbedingungen erfüllen für $\beta = R/x_0 = 2$. Nur die linke minimiert die Oberfläche der Seifenblase.

Achtung: Auf diesem Übungsblatt sind die Aufgaben **1, 2 und 3** Pflichtaufgaben!
Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 18. 11. 2008.