1. **Pendel mit horizontal schwingendem Aufhängepunkt.** Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels macht auf der x-Achse harmonische Schwingungen: (4 Pkt.)

$$x(t) = A\cos\omega t$$

Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie die Fadenspannung

2. **Problem der Dido.** Die Gründungslegende von Karthago berichtet, dass die phönizische Prinzessin Dido vor ihrem machtgierigen Bruder floh und an der afrikanischen Küste landete. Der ortsansässige Häuptling versprach ihr so viel Land an der Küste, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen könne. Dido schnitt daraufhin die Ochsenhaut in dünne Streifen, legte sie aneinander und konnte somit ein großes Stück Land markieren.

   (a) Betrachten Sie die Küstenlinie als Gerade (das ist in der Tat eine gute Näherung für den Verlauf der Küste in der Nähe der Byrsa, der Keimzelle Karthagos) duch $(0, -d)$ und $(0, d)$ und bestimmen Sie diejenige Funktion $y(x)$, die die Fläche (4 Pkt.)

$$A[y(x)] = \int_{-d}^{d} y(x)\,\mathrm{d}x$$

   maximiert, die Randbedingungen $y(-d) = y(d) = 0$ erfüllt und eine vorgegebene Länge L hat.

   (b) Betrachten Sie nun eine beliebige Küstenlinie $K(x)$. Um hier eine möglichst große Fläche zu erhalten, ist es sinnvoll, die Endpunkte mitzuvariieren. Neben der Euler-Lagrange-Gleichung ist dann noch ein Randterm zu berücksichtigen. Stellen Sie in diesem Falle allgemein ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es im angegebenen Spezialfall einer Küstenlinie, die durch (2 Pkt.)

$$y(x) = x^2 - x$$

   gegeben ist.

(insgesamt 6 Pkt.)

3. **Geschlossene Bahnen im Zentralpotential.** Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes im attraktiven Potential (4 Pkt.)

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^k},$$

wobei $k \geq$. Der Massenpunkt sei gebunden, d.h. r variiert zwischen einem Maximalwert r_{max} und einem Minimalwert r_{min}. Es sei

$$\gamma = \frac{r_{\text{max}}}{r_{\text{min}}} = 1 + \delta \text{ mit } \delta > 0.$$

Zeigen Sie, das die Bahn $r(\phi)$ nur für $k = 1$ geschlossen ist.

Hinweise: Sei ϕ_0 der Winkel, der von r_{min} nach r_{max} überstrichen wird (wie sieht ϕ_0 für eine geschlossene Bahn aus?). Bringen Sie ϕ_0 auf die Form

$$\phi_0 = \int_0^{\gamma} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{\epsilon - x^2 + \beta x^k}},$$

mir $x = r/r_{\text{max}}$. Überlegen Sie, das der Integrand an den Grenzen verschwinden muss; Sie können dann mit $x = 1 + \delta y$ das Integral auf eines umschreiben, das nur von δ, y und k abhängt. Zeigen Sie, das die Bahn für $k = 1$ geschlossen ist, und studieren Sie für $k \neq 1$ ϕ_0 für kleine Abweichungen von der Kreisbahn $\delta = 0$.

4. **Holonome Nebenbedingungen.** Gegeben sei das folgende Funktional, welches extremal werden soll: (3 Pkt.)

$$J[y_1, y_2] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, y_2, y_1', y_2', x).$$

Mit der holonomen Nebenbedingung:

$$g(y_1, y_2, x) = 0.$$

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für diese Problemstellung her. Zerlegen Sie dazu das Intervall $[x_1, x_2]$ in n gleich große Intervalle der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{n}$. Überführen Sie dann die holonome NB in n isoperimetrische Nebenbedingungen.

Achtung: Küraufgaben sind **Aufgabe 2 (b)**, **Aufgabe 3** und **Aufgabe 4**.
Auf diesem Übungsblatt sind maximal **17 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 25. 11. 2008.