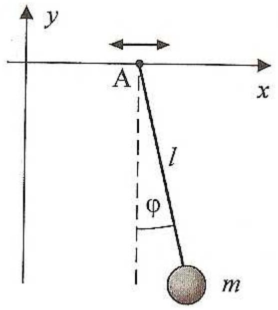
1. **Pendel mit horizontal schwingendem Aufhängepunkt.** Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels macht auf der x-Achse harmonische Schwingungen: (4 Pkt.)

$$x(t) = A\cos\omega t$$

Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie die Fadenspannung



Lösung: Wir verwenden Polarkoordinarenr, ϕ als generalisierte Koordinaten. Die holonome Zwangsbedingung lautet:

$$f(r,\phi) = r - l = 0 \qquad \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$$

Die Transformationsgleichungen füe die kartesischen Koordinaten der Masse m sind:

$$x = A\cos\Omega t + r\sin\phi \qquad y = -r\cos\phi$$

$$\rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - 2A\Omega\sin\Omega t\,(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}cos\phi)\right] + mgr\cos\phi$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} \underset{\textbf{mit r=l}}{=} ml^2\left(\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi - \frac{A}{l}\Omega^2\cos\phi\cos\Omega t\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} \underset{\textbf{mit r=l}}{=} -m\left(A\Omega^2\cos\Omega t\sin\phi + l\dot{\phi}^2 + g\cos\phi\right) = \lambda \qquad (2)$$

Gleichung (1) ist die Bewegungsgleichung für den Winkel ϕ.
Die Spannkraft $-\lambda$ des Pendelfadens besteht nach Gleichung (2) aus drei Anteilen:

- $mg\cos\phi$ = radiale Komponente der Gewichtskraft.
- $ml\dot{\phi}^2$ = Zentrifugalkraft
- $m\cdot A\Omega^2\cos\Omega t\cdot\sin\phi$

2. **Problem der Dido.** Die Gründungslegende von Karthago berichtet, dass die phönizische Prinzessin Dido vor ihrem machtgierigen Bruder floh und an der afrikanischen Küste landete. Der ortsansässige Häuptling versprach ihr so viel Land an der Küste, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen könne. Dido schnitt daraufhin die Ochsenhaut in dünne Streifen, legte sie aneinander und konnte somit ein großes Stück Land markieren.

(a) Betrachten Sie die Küstenlinie als Gerade (das ist in der Tat eine gute Näherung für den Verlauf der Küste in der Nähe der Byrsa, der Keimzelle Karthagos) duch $(0,-d)$ und $(0,d)$ und bestimmen Sie diejenige Funktion $y(x)$, die die Fläche (4 Pkt.)

$$A[y(x)] = \int_{-d}^{d} y(x)\,\mathrm{d}x$$

maximiert, die Randbedingungen $y(-d) = y(d) = 0$ erfüllt und eine vorgegebene Länge L hat.

(b) Betrachten Sie nun eine beliebige Küstenlinie $K(x)$. Um hier eine möglichst große Fläche zu erhalten, ist es sinnvoll, die Endpunkte mitzuvariieren. Neben der Euler-Lagrange-Gleichung ist dann noch ein Randterm zu berücksichtigen. Stellen Sie in diesem Falle allgemein ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es im angegebenen Spezialfall einer Küstenlinie, die durch (2 Pkt.)

$$y(x) = x^2 - x$$

gegeben ist.

(insgesamt 6 Pkt.)

Lösung:

(a) Zu maximieren ist

$$A[y(x)] = \int_{-d}^{d} y(x)\,\mathrm{d}x$$

unter der Nebenbedingung

$$l[y(x)] = \int_{-d}^{d} \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x;$$

zu maximieren ist also das Funktional

$$J[y(x)] = \int_{-d}^{d} \left(y(x) - \lambda\sqrt{1+y'(x)^2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-d}^{d} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

Offensichtlich hängt die Funktion $F(x,y,y')$ gar nicht von x ab. Daraus folgt, dass mit

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = \frac{-\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'(x)^2}} - \left(y - \lambda\sqrt{1+y'(x)^2}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'(x)^2}} - y = -b$$

eine Erhaltungsgröße gegeben ist. Umstellen nach y'^2 ergibt

$$y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y-b)^2} - 1\,, \qquad (3)$$

woraus wir weiter

$$\int \frac{(y-b)}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}}\,\mathrm{d}y = \pm\int \mathrm{d}x$$

$$-\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2} = \pm(x-a)$$

folgern. Damit erhalten wir eine implizite Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2 , \tag{4}$$

die einen Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius λ beschreibt.

Die freien Parameter a, b und λ werden durch die Rand- und Nebenbedingungen bestimmt. Aus $y(-d) = 0$ und $y(d) = 0$ folgen

$$a = 0 \qquad \text{und} \qquad b = \sqrt{\lambda^2 - d^2} .$$

Mit $a = 0$, (3) und (4) folgt

$$y'^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2} - 1 .$$

Die Länge des Randes der Fläche beträgt somit

$$l = \int_{-d}^{d} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \int_{\arcsin \frac{-d}{\lambda}}^{\arcsin \frac{d}{\lambda}} \frac{\lambda \cos u \, \mathrm{d}u}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 u}} = 2\lambda \arcsin \frac{d}{\lambda} .$$

Hierbei haben wir die Substitution $x = \lambda \sin u$ verwendet und ausgenutzt, dass arcsin eine ungerade Funktion ist ($\arcsin(-z) = -\arcsin(z)$). O. B. d. A. können wir annehmen, dass λ positiv ist, denn λ geht quadratisch in die Kreisgleichung ein und außerdem hängt die Länge l nicht von dessen Vorzeichen ab.

$$2(-\lambda) \arcsin \frac{d}{(-\lambda)} = 2(-\lambda)(-\arcsin \frac{d}{\lambda}) = 2\lambda \arcsin \frac{d}{\lambda} .$$

Die Bestimungsgleichung für λ können wir auch als

$$\begin{aligned} \frac{d}{\lambda} &= \sin \frac{l}{2\lambda} \\ \underbrace{\frac{2d}{l}}_{=\alpha} \cdot \underbrace{\frac{l}{2\lambda}}_{=\xi} &= \sin \underbrace{\frac{l}{2\lambda}}_{=\xi} \end{aligned}$$

schreiben. Diese Gleichung können wir nun leicht graphisch lösen. Anschaulich ist klar, dass l mindestens so lang wie der Absatnd von $(-d, 0)$ zu $(d, 0)$ sein muss, außerdem kann l nicht länger als der Umfang $2\pi\lambda$ des Kreises sein, $2d < l < 2\pi\lambda$. Daraus folgen die Bedingungen $\alpha < 1$ und $0 < \xi < \pi$. Hierfür lässt sich ξ eindeutig bestimmen.

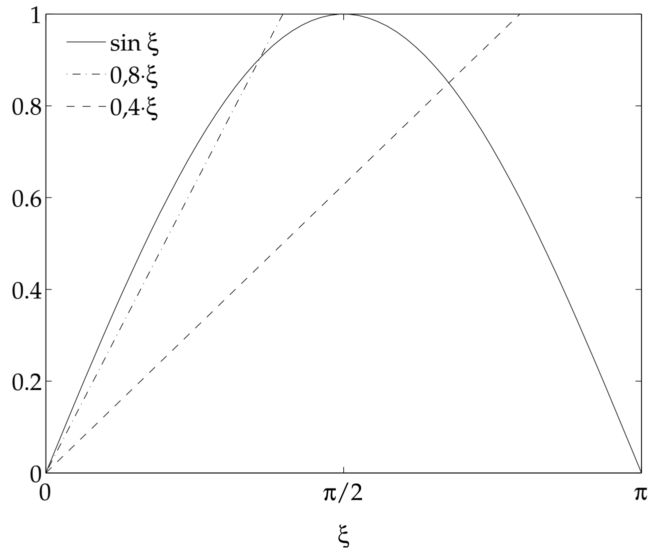
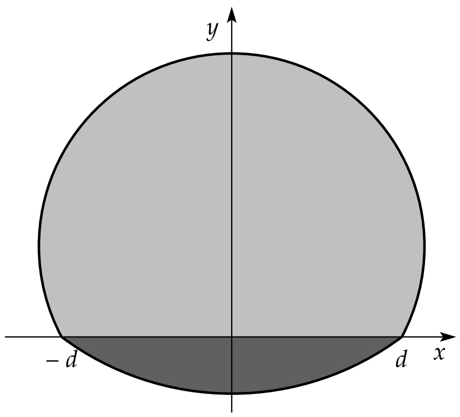


Abbildung 1: Graphische Lösung der Gleichung $\alpha\xi = \sin\xi$.



Die Skizze zeigt zwei Lösungen für verschiedene Längen l bei festem d. Zur Lösung der Aufgabe hatten wir vorausgesetzt, dass die Lage des Randes durch die Funktion $y(x)$ beschrieben werden kann, die jedem x *eindeutig* ein y zuweist. Daher müssen wir die Lösungen eigentlich auf $l \leq \pi d$ einschränken. Tatsächlich gelten die gefundenen Lösungen auch für $\pi d < l < 2\pi d$. Da $b > 0$ ist, liegt für $l \leq \pi d$ das Kressegment unterhalb der x-Achse und für $\pi d < l < 2\pi d$ darüber.

(b) Die Randkurve wird auch im allgemeinen Fall wieder ein Kreisabschnitt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2\,,$$

sein; die Euler-Lagrange-Gleichungen unterscheiden sich ja bei festen oder mitvariierten Randbedingungen nicht. Es ist aber natürlich nicht mehr egal, an welchem Küstenabschnitt man Land absteckt; die Endpunkte x_0 und x_1 müssen ebenfalls mitvariiert werden. Daraus ergeben sich neue Randbedingungen:

$$y(x_0) = K(x_0),\, y(x_1) = K(x_1)$$

(Endpunkte liegen auf der Küste), und

$$y'(x_0) * K'(x_0) = -1,\, y'(x_1) * K'(x_1) = -1$$

(Küste wird senkrecht geschnitten). Zusammen mit

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

findet man wieder ein Gleichungssystem von fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten a, b, λ, x_0, x_1.

Für $K(x) = x^2 - x$ allerdingsauch nicht analytisch gelöst werden…

3. **Geschlossene Bahnen im Zentralpotential.** Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes im attraktiven Potential (4 Pkt.)

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^k},$$

wobei $k \geq$. Der Massenpunkt sei gebunden, d.h. r variiert zwischen einem Maximalwert r_{max} und einem Minimalwert r_{min}. Es sei

$$\gamma = \frac{r_{\text{max}}}{r_{\text{min}}} = 1 + \delta \text{ mit } \delta > 0.$$

Zeigen Sie, das die Bahn $r(\phi)$ nur für $k = 1$ geschlossen ist.

Hinweise: Sei ϕ_0 der Winkel, der von r_{min} nach r_{max} überstrichen wird (wie sieht ϕ_0 für eine geschlossene Bahn aus?). Bringen Sie ϕ_0 auf die Form

$$\phi_0 = \int_0^\gamma \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{\epsilon - x^2 + \beta x^k}},$$

mir $x = r/r_{\text{max}}$. Überlegen Sie, das der Integrand an den Grenzen verschwinden muss; Sie können dann mit $x = 1 + \delta y$ das Integral auf eines umschreiben, das nur von δ, y und k abhängt. Zeigen Sie, das die Bahn für $k = 1$ geschlossen ist, und studieren Sie für $k \neq 1$ ϕ_0 für kleine Abweichungen von der Kreisbahn $\delta = 0$.

Lösung: Es ist

$$\phi_0 = \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \mathrm{d}r \frac{\ell}{r^2} \left(2\mu(E - U_{\text{eff}})\right)$$

mit $U_{\text{eff}} = U - \ell^2/2\mu r^2$. Mit den Substitutionen

$$\epsilon = r_{\text{max}} \frac{2\mu}{E\ell^2}, \ \beta = r_{\text{max}} \frac{2\mu\alpha}{\ell^2}, r = r_{\text{max}} x$$

folgt

$$\phi_0 = r_{\text{max}} \int_1^\gamma \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{\epsilon - \frac{1}{x^2} + \frac{\beta}{x^k}}}.$$

An den Grenzen liegen Umkehrpunkte der Bahn; hier ist die kinetische Energie Null. Der Wurzelterm ist jedoch im wesentlichen $E - U = T$, also muss dieser an den Grenzen verschwinden und man erhält:

$$\epsilon - 1 + \beta = 0 \text{ und } \epsilon - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\beta}{\gamma^k} = 0,$$

woraus

$$\epsilon = \frac{\gamma^{-2} - \gamma^{-k}}{1 - \gamma^{-k}}, \ \beta = \frac{1 - \gamma^{-2}}{1 - \gamma^{-k}}$$

folgt.

Eine weitere Substitution $x = 1 + \delta y$ liefert

$$\phi_0 = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{\sqrt{\epsilon - \frac{1}{(1+\delta y)^2} + \frac{\beta}{(1+\delta y)^k}}},$$

mit $\gamma = 1 + \delta$. Für $k = 1$ kann man das Integral analytisch auswerten und man erhält $\phi_0 = 2\pi$, wie zu erwarten für eine geschlossene Bahn.

Entwicklung um $\delta = 0$ (Taylor 1. Ordung) liefert

$$\epsilon = \frac{k+2}{k}, \ \beta = \frac{2}{k};$$

auch hier kann das Integral analytisch ausgeführt werden und liefert

$$\phi_0 = \frac{8\pi}{2\sqrt{1/k} + \sqrt{(4+2\delta(k-1))/k}};$$

also gilt $\phi_0 = 2\pi$ nur für $k = 1$.

4. **Holonome Nebenbedingungen.** Gegeben sei das folgende Funktional, welches extremal werden soll: (3 Pkt.)

$$J[y_1, y_2] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, y_2, y_1', y_2', x)$$

mit der holonomen Nebenbedingung:

$$g(y_1, y_2, x) = 0.$$

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für diese Problemstellung her. Zerlegen Sie dazu das Intervall $[x_1, x_2]$ in n gleich große Intervalle der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{n}$. Überführen Sie dann die holonome NB in n isoperimetrische Nebenbedingungen.

Lösung: Wir führen zunächst die Hilfsfunktionen f_i ein, die

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt, wobei $x_i = x_1 + d(i-1)$ ist. Aus der Nebenbedingung $g(y_1, y_2, x) = 0$ folgt dann

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x g(y_1, y_2, x) f_i(x) = 0$$

für $i = 1, \ldots, n$. Das sind n isoperimetrische Nebenbedingungen, die man berücksichtigen kann, indem man das Funktional

$$J^*[y_1, y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x F^*(y_1, y_2, y_1', y_2', x)$$

extremal macht. F^* ist dabei durch

$$F^*(y_1, y_2, y_1', y_2', x) = F(y_1, y_2, y_1', y_2', x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(y_1, y_2, x) f_i(x)$$

gegeben. Im Limes $n \to \infty$ geht die Summe in eine kontinuierliche Funktion über:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \lambda(x),$$

und man hat

$$F^*(y_1, y_2, y_1', y_2', x) = F(y_1, y_2, y_1', y_2', x) - \lambda(x) g(y_1, y_2, x).$$

Es folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = \frac{\partial F}{\partial y_j} - \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y_j}$$

mit $j = 1, 2$.

Achtung: Küraufgaben sind **Aufgabe 2 (b)**, **Aufgabe 3** und **Aufgabe 4**.
Auf diesem Übungsblatt sind maximal **17 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 25. 11. 2008.