1. **Runge-Lenz-Vektor.** Ein Massenpunkt der Masse m mit dem Drehimplus $\vec{L}$ bezüglich des Kraftzentrums bewege sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(|\vec{r}|)$. Geben Sie alle möglichen Potentiale an, für die (4 Pkt.)

$$\vec{D} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$$

auf allen Bahnkurven zeitlich konstant ist.

2. **Periheldrehung.** Im Gravitationspotential $U_0(r) = -\alpha/r$ der Sonne bewegt sich ein Planet auf einer Ellipsenbahn. Kleine Störungen δU des Potentials (relativistische Effekte, Einfluss der anderen Planeten) führen zu einer Periheldrehung: Nach jedem Umlauf ändert sich die Richtung des Perihels um $\delta\phi = \Delta\phi - 2\pi$, wenn $\Delta\phi$ der zwischen einem Perihel und dem nächten überstrichene Winkel ist. (6 Pkt.)

   (a) Leiten Sie für $\Delta\phi$ die Beziehung

$$\Delta\phi = -2\sqrt{2\mu}\frac{\partial}{\partial \ell}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \mathrm{d}r \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2\mu\,(E-U(r)) - \ell^2/r^2}} \tag{1}$$

   für ein beliebiges Potential U her. Zeigen Sie, dass für $U = U_0$ $|\Delta\phi| = 2\pi$ ist.

   (b) Berücksichtigen Sie für $U = U_0 + \delta U$ nur die erste Ordnung in δU und berechnen Sie die Periheldrehung $\delta\phi$.
   Hinweise: Stellen Sie den Wurzelterm in Gl. (1) als $\sqrt{\mu/2}\dot{r}$ dar, verwenden Sie $\mathrm{d}r/\dot{r} = \mathrm{d}\phi/\dot{\phi}$ und $\dot{\phi} = \ell/\mu r^2$. Sie erhalten dann für $\delta\phi$ eine Integraldarstellung mit einem Integral über $\mathrm{d}\phi$.

   (c) Setzen Sie nun in Ihre Lösung die ungestörte Bahnkurve $r(\phi) = p/(1+\epsilon\cos\phi)$ ein und berechnen Sie $\delta\phi$ für das Störpotential $\delta U(r) = -\beta/r^2$.

   (d) Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist $\delta U(r) = -\beta/r^2$ die erste relativistische Korrektur zum Newtonschen Gravitationspotential. Es ist

$$\beta = \frac{2\alpha}{mc^2}, \text{ wobei } c \text{ die Lichtgeschwindigkeit und } m \text{ die Planetenmasse ist.}$$

   Berechnen Sie, um welchen Winkel $\delta\phi$ sich die Achse der Merkurbahn nach dieser Korrektur pro Jahr bewegt. Besorgen Sie sich dazu aus geeigneter Quelle Zahlenwerte für die benötigten Parameter (Sonnenmasse, Merkurmasse, Bahnradius Merkur,...).

3. **Windungszahl.** In einem attraktiven Potential kann eine gestreute Masse das Streuzentrum unter Umständen mehrfach umlaufen, bevor sie davonfliegt. Untersuchen Sie für das Gravitationspotential $U(\vec{r}) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$ die Abhängingkeit der Windungszahl von Energie E und Drehimpuls ℓ der getreuten Masse. Zur Auswertung der auftretenden Integrale und zur graphischen Darstellung bietet sich die Verwendung eines Computer-Algebra-Systems an. Die Windungszahl ist definiert als die Anzahl der Umläufe ums Streuzentrum. (4 Pkt.)

4. **Bestimmung des Potentials aus der Bahn $r(\phi)$.** Für jeden Orbit $r(\phi)$ gibt es unendlich viele Kräfte $F(r)$, die ein Teilchen auf diesen Orbit laufen lassen. Bei einer Zentralkraftbewegung hingegen sind die Größe $f(r) := -\frac{dV}{dr}$ und damit auch die Kraft eindeutig aus der Bahn abzuleiten. (4 Pkt.)

   (a) Beweisen Sie:

$$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{l^2}{mr^4}\left[\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r\right]$$

(b) Ein Körper bewegt sich auf einer Ellipse in einem Zentralkraftfeld, das in einem Brennpunkt der Ellipse liegt. Zeigen Sie, dass $f(r) \sim r^{-2}$.

(c) Es gelt $r(\phi) = r_0 e^{-\phi}$. Zeigen Sie, dass $f(r) \sim r^{-3}$

(insgesamt 4 Pkt.)

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **18 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 9. 12. 2008.