1. **Runge-Lenz-Vektor.** Ein Massenpunkt der Masse m mit dem Drehimplus $\vec{L}$ bezüglich des Kraftzentrums bewege sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(|\vec{r}|)$. Geben Sie alle möglichen Potentiale an, für die (4 Pkt.)

$$\vec{D} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$$

auf allen Bahnkurven zeitlich konstant ist.

Lösung: Zeitliche Ableitung des Runge-Lenz-Vektors $\vec{D}$ lautet

$$\dot{\vec{D}} = (\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}) + (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}) + (\nabla V \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}}$$

Im Zentralpotential ist $\dot{\vec{L}} = 0$ und außerdem

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r\,.$$

Dies hat zur Folge, dass

$$\begin{aligned}\dot{\vec{D}} &= -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{m}{r}[\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}} \\ &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}] + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}} \\ &= \dot{\vec{r}}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + V(r)\right)\,.\end{aligned}$$

Für $\dot{\vec{D}} = 0$ muss folglich die Klammer verschwinden. Die Differentialgleichung

$$V'(r) = -\frac{V(r)}{r}$$

hat die Lösung

$$V(r) = \frac{c}{r} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

2. **Periheldrehung.** Im Gravitationspotential $U_0(r) = -\alpha/r$ der Sonne (Masse M) bewegt sich ein Planet (Masse m) auf einer Ellipsenbahn ($\alpha = GMm$). Kleine Störungen δU im Potential $U(r) = U_0(r) + \delta U(r)$ führen in der Regel zu einer Periheldrehung. Nach jedem Umlauf ändert sich die Richtung des Perihels (sonnennächster Punkt) um den Winkel $\delta\varphi$.

Auf dem Weg von Perihel zum Perihel ändert sich der Winkel um

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2\mu}\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}(L)}^{r_{\max}(L)} \sqrt{E - U(r) - L^2/(2\mu r^2)}\,\mathrm{d}r\,.$$

(L Drehimpuls; μ reduzierte Masse; $r_{\min}$, $r_{\max}$ minimaler bzw. maximaler Radius)

(a) Begründen Sie zunächst die für $\Delta\varphi$ angegebene Formel, indem Sie die Differentiation nach L ausführen. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass für $\delta U = 0$, $\Delta\varphi = 2\pi$ gilt und die Bahnen geschlossen sind. Ermitteln Sie $r_{\min}$ und $r_{\max}$ dazu aus dem effektiven Potential. (2 Pkt.)

(c) Berechnen Sie die Periheldrehung in erster Ordnung in δU. (Das Ergebnis lautet (2 Pkt.)

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = 2\mu \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^\pi r_0(\varphi)^2\,\delta U(r_0(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\right),$$

wobei $r_0(\varphi)$ die Bahn im ungestörten Potential ist.)

(d) Werten Sie das Ergebnis für die Störpotentiale $\delta U(r) = \gamma/r^3$ und $\delta U(r) = \beta/r^2$ aus. (2 Pkt.)

(insgesamt 7 Pkt.)

Lösung:

(a) Um die Differentiation nach L auszuführen, benutzen wir die Leibniz'sche Integrationsregel.

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{a(z)}^{b(z)} f(x,z)\,\mathrm{d}x = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x + f(b(z),z)\frac{\partial b}{\partial z} - f(a(z),z)\frac{\partial a}{\partial z}$$

Mit ihr folgt

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2\mu}\Bigg(\int_{r_{\min}(L)}^{r_{\max}(L)} \frac{-2L/(2\mu r^2)}{2\sqrt{E-U(r)-L^2/(2\mu r^2)}}\,\mathrm{d}r + \sqrt{E-U(r_{\max})-L^2/(2\mu r_{\max}^2)}\,r'_{\max}(L) - \sqrt{E-U(r_{\min})-L^2/(2\mu r_{\min}^2)}\,r'_{\min}(L)\Bigg)$$

Der zweite bzw. dritte Term verschwindet, denn die Gesamtenergie beträgt

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

und ist der Radius extremal, folgt $\dot{r} = 0$ bzw. $E - U(r) - L^2/(2\mu r^2) = 0$. Übrig bleibt

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}(L)}^{r_{\max}(L)} \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu(E-U(r)) - L^2/r^2}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Das verbleibende Integral gibt den Winkel an, der beim Umlauf von einem Perihel zum anderen überschritten wird (siehe Vorlesung).

(b) Wie gehen von

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu(E+\alpha/r) - L^2/r^2}}\,\mathrm{d}r$$

aus und substituieren $u = L/r$, $\mathrm{d}u = -L/r^2\,\mathrm{d}r$. Das neue Integral findet man dann in gängigen Integraltafeln. Nach eingen kleinen Umformungen ergibt sich

$$\Delta\varphi = -2\int_{L/r_{\min}}^{L/r_{\max}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{L}u - u^2}} = -2\arcsin\frac{\frac{\mu\alpha}{L} - u}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2}}}\Bigg|_{u=L/r_{\min}}^{u=L/r_{\max}}\,.$$

Die Werte für L/r_{min} und L/r_{max} folgen aus dem effektiven Potential, an den extremalen Radien gilt

$$E = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{\alpha}{L}u + \frac{1}{2\mu}u^2$$

und somit

$$\frac{L}{r_{\text{min}}} = \frac{\mu\alpha}{L} + \frac{\mu\alpha}{L}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \qquad \text{und} \qquad \frac{L}{r_{\text{max}}} = \frac{\mu\alpha}{L} - \frac{\mu\alpha}{L}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\,.$$

Für den Winkel $\Delta\varphi$ folgt somit weiter

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -2\left[\arcsin\frac{\frac{\mu\alpha}{L} - \left(\frac{\mu\alpha}{L} - \frac{\mu\alpha}{L}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2}}} - \arcsin\frac{\frac{\mu\alpha}{L} - \left(\frac{\mu\alpha}{L} + \frac{\mu\alpha}{L}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2}}}\right] \\ &= -2[\arcsin(-1) - \arcsin(1)] = 2\pi\,.\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen nun $\Delta\varphi$ für $U(r) = U_0(r) + \delta U(r)$ in erster Ordnung in $\delta U(r)$.

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(U) &= \Delta\varphi(U_0) + \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial U}\delta U \\ &= 2\pi + \sqrt{2\mu}\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{\delta U(r)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{E + \alpha/r - L^2/(2\mu r^2)}}\end{aligned}$$

Mit $E + \alpha/r - L^2/(2\mu r^2) = E_{\text{kin.}} = \mu\dot{r}^2/2$ folgt

$$= 2\pi + \sqrt{2\mu}\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{\delta U(r)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{\mu\dot{r}^2/2}} = 2\pi + 2\mu\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi} r^2\delta U(r)\,\mathrm{d}\varphi\right)\,.$$

Im letzten Schritt haben wir $\mathrm{d}r/\dot{r} = \mathrm{d}\varphi/\dot{\varphi}$ und $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$ genutzt, und die ungestörten Grenzen eingesetzt. Es folgt

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = 2\mu\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi} r_0(\varphi)^2\,\delta U(r_0(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\right)\,.$$

(d) Hierin ist nun die ungestörte Ellipsenbahn $r = p/(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ mit dem Parameter $p = L^2/(\mu\alpha)$ und der Exzentrizität $\varepsilon < 0$ einzusetzen. Berücksichtigen wir bei der Differentiataion nach L, dass der Halbparameter p eine Funktion des Drehimpulses ist, ergibt dies für das Störpotential $\delta U = \gamma/r^3$

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= 2\gamma\mu\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\varphi\right) = 2\gamma\mu\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{Lp}\int_0^{\pi}(1 + \varepsilon\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right) \\ &= 2\gamma\mu\frac{\partial}{\partial L}\frac{\pi}{Lp} = 2\gamma\mu\frac{\partial}{\partial L}\frac{\pi}{L^3/(\mu\alpha)} = -\frac{6\pi\gamma\mu^2\alpha}{L^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha L^4/(\mu\alpha)^2} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}\,.\end{aligned}$$

Analog folgt mit $\delta U = \beta/r^2$

$$\delta\varphi = 2\beta\mu\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\right) = 2\beta\mu\frac{\partial}{\partial L}\frac{\pi}{L} = -\frac{2\pi\beta\mu}{L^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}\,.$$

Schlussbemerkung: Störungen des reinen Keplerproblems haben verschiedene Ursachen. So besitzt die Sonne aufgrund ihrer Eigendrehung keine vollkommen rotationssymmetrische Massenverteilung. Dies führt zu einem sog. Quadrupolmoment, das einen zu r^{-3} proportionalen Beitrag zum Potential liefert. Auch relativistische Korrekturen des Keplerproblem drücken sich in einem zu r^{-3} proportionalen Beitrag zum Potential aus.

3. **Windungszahl.** In einem attraktiven Potential kann eine gestreute Masse das Streuzentrum unter Umständen mehrfach umlaufen, bevor sie davonfliegt. Untersuchen Sie für das Gravitationspotential $U(\vec{r}) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$ die Abhängingkeit der Windungszahl von Energie E und Drehimpuls ℓ der getreuten Masse. Zur Auswertung der auftretenden Integrale und zur graphischen Darstellung bietet sich die Verwendung eines Computer-Algebra-Systems an. Die Windungszahl ist definiert als die Anzahl der Umläufe ums Streuzentrum. (4 Pkt.)

Lösung: Der Winkel, der beim Umlauf überstrichen wird, ist

$$\Delta\phi = \ell \int_{r_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}r \frac{1}{r^2\sqrt{2m(E+\alpha/r-\ell^2/(2mr^2)}},$$

die Bahnkurve hat die Windungszahl n, wenn $\Delta\phi \geq n\pi$ und $\Delta\phi < (n+1)\pi$ ist.

$r_{\min}$ ist bekannt: Für eine Kepler-Bahn gilt allgemein

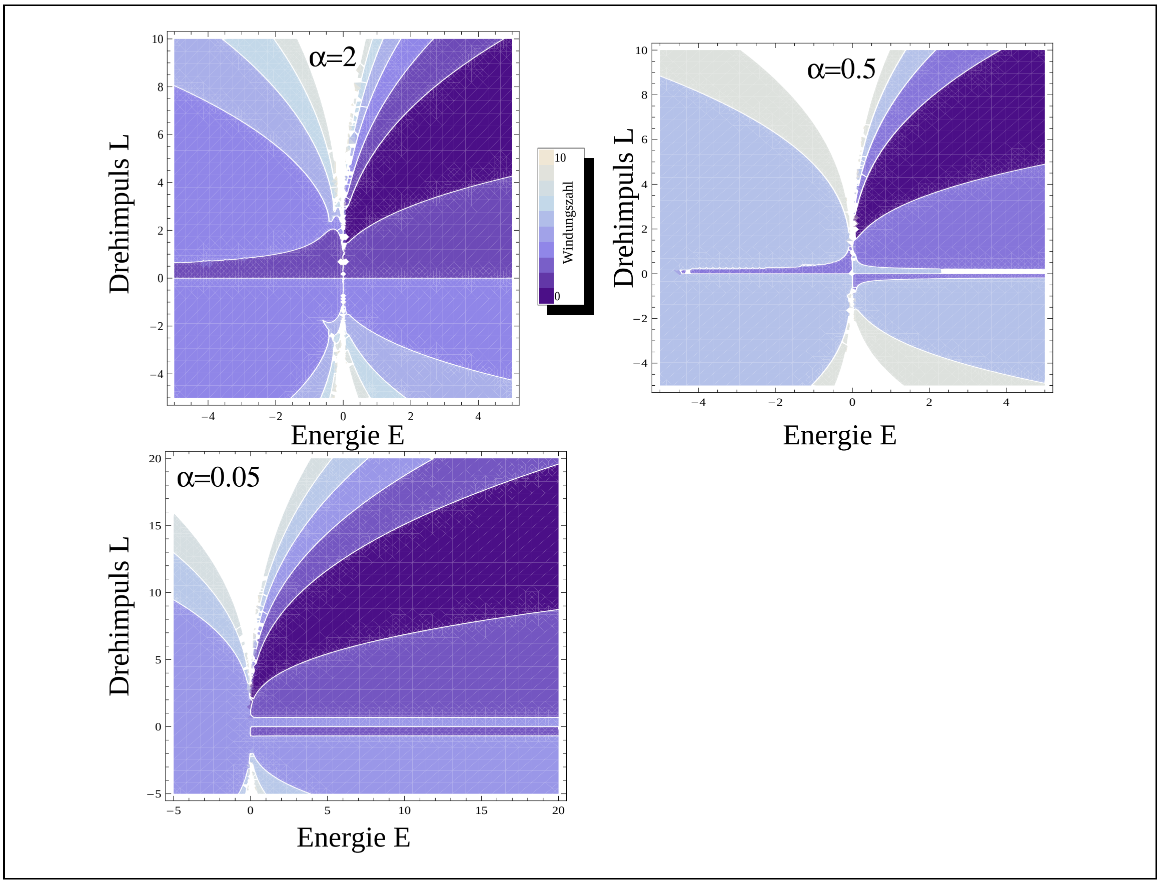
$$r_{\min} = \frac{p}{1+\epsilon},$$

mit

$$p = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \epsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}.$$

Das Integral kann dann (z.B. mit einem CAS) analytisch ausgewertet werden. Diese Lösung ist im folgenden geplottet, wobei in der E-ℓ-Ebene Bereiche entsprechend der Größe der Windungszahl eingefärbt sind.

Für kleine ℓ und kleine E divergiert die Windungszahl: Das Streuzentrum wird in einer Spriralbahn umlaufen, die Windungszahl ist unendlich. Das passiert, wenn E nicht ausreicht, um die Drehimpulsbarriere zu überwinden (weiße Fläche). Betrachtet man für eine feste Energie die Abhängigkeit von ℓ, so fällt die Nichtmonotonie auf: Für kleine ℓ wird das Streuzentrum umlaufen, für etwas größere nicht mehr (Hyperbelbahn!), und dann immer öfter, je größer ℓ ist. Dieser Verhalten ist für schwach anziehende Potentiale stärker ausgeprägt als für stark anziehende.



4. **Bestimmung des Potentials aus der Bahn** $r(\phi)$**.** Für jeden Orbit $r(\phi)$ gibt es unendlich viele Kräfte $F(r)$, die ein Teilchen auf diesen Orbit laufen lassen. Bei einer Zentralkraftbewegung hingegen sind die Größe $f(r) := -\frac{dV}{dr}$ und damit auch die Kraft eindeutig aus der Bahn abzuleiten. (4 Pkt.)

   (a) Beweisen Sie:

   $$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{l^2}{mr^4}\left[\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r\right]$$

   (b) Ein Körper bewegt sich auf einer Ellipse in einem Zentralkraftfeld, das in einem Brennpunkt der Ellipse liegt. Zeigen Sie, dass $f(r) \sim r^{-2}$.

   (c) Es gelt $r(\phi) = r_0 e^{-\phi}$. Zeigen Sie, dass $f(r) \sim r^{-3}$

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a)

$$\ddot{r} = \frac{f(r)}{m} + r\dot{\phi}^2$$

Mit zweimaliger Ableitung der Gl. $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\phi}\dot{\phi}$ folgt

$$\ddot{=} \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\phi}\dot{\phi}\right) = \dot{\phi}^2\frac{d^2r}{d\phi^2} + \ddot{\phi}\frac{dr}{d\phi}$$

$$mr^2\dot{\phi} = p_\phi = const$$

$$\rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} = -\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)\dot{\phi}^2$$

Wir setzen die beiden Gleichungen in die erste ein und erhalten die Behauptung.

(b) Aus $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$ folgt mit Teil a)

$$f(r) = -\frac{p_\phi^2}{mpr^2}$$

(c)

$$f(r) = -\frac{2p_\phi^2}{mr^3}$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **19 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 9. 12. 2008.