1. **Trägheitstensor.** Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Hohlzylinders homogener Dichte ϱ. Er habe die Länge l, die Masse m, den Außenradius r_a und den Innenradius r_i. Wählen Sie ein Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und die Symmetrieachse auf der z-Achse liegt. (4 Pkt.)

Lösung: Wenn wir das Koordinatensystem so wählen, verschwinden wegen der Lage des Schwerpunktes alle nicht-diagonal Elemente des Trägheitstensors. Es bleiben also nur noch drei Komponenten zu berechnen. Da alle auftretenden Integrale vom Typ $\int \left(x_i^2 + x_j^2\right) \mathrm{d}V$ sind, werden wir zunächst die Teilintegrale berechnen.

1. Zur Berechnung der Integrale wählen wir natürlich Zylinderkoordinaten. Damit ergibt sich das Volumenelement zu $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{d}V &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} r^3 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_{r_i}^{r_a} r^3 \,\mathrm{d}r \\ &= l\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r_i}^{r_a} = \frac{1}{4} l\pi (r_a^4 - r_i^4) = l\pi (r_a^2 - r_i^2)(r_a^2 + r_i^2) = \frac{1}{4} V (r_a^2 + r_i^2)\,.\end{aligned}$$

2. Für die zweite Integration ergibt sich ganz analog

$$\int y^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{4} V (r_a^2 + r_i^2)\,.$$

Dies Ergebnis überrascht wegen der Symmetrie des Körpers nicht.

3. Das letze Integral dieser Form ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\int z^2 \mathrm{d}V &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} r z^2 \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{r_i}^{r_a} r\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right) \pi \left(r_a^2 - r_i^2\right) = \frac{1}{12} V l^2\end{aligned}$$

Mit diesen Integralen können wir die nichtverschwindenden Komponenten des Trägheitstensors sehr leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\Theta_{xx} &= \int \left(y^2 + z^2\right) \varrho \,\mathrm{d}V = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2) + \frac{1}{12} m l^2 \\ \Theta_{yy} &= \int \left(x^2 + z^2\right) \varrho \,\mathrm{d}V = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2) + \frac{1}{12} m l^2 \\ \Theta_{zz} &= \int \left(x^2 + y^2\right) \varrho \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)\end{aligned}$$

2. **Streuquerschnitt.** Ein Teilchen bewegt sich im Potential

$$V(r) = -\frac{C}{3r^3}\,.$$

   (a) Finden Sie das Maximum des effektiven Potentials bei gegebenem Drehimpuls L. (1 Pkt.)

   (b) Das Teilchen starte bei $r = \infty$ mit der Geschwindigkeit v_0 und dem Stoßparameter b. Für welchen Wert b_{max} wird das Teilchen gerade noch eingefangen? Leiten Sie eine Relation zwischen dem Streuquerschnitt und b_{max} her. (2 Pkt.)

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a) Das effektive Potential lautet hier

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3}\,.$$

Die Position des Maximums erhalten wir, indem wir die Nullstelle der Ableitung finden

$$0 = \frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{C}{r^4}\,.$$

Als einzige Nullstelle erhalten wir

$$r_0 = \frac{mC}{L^2}\,.$$

An dieser Stelle hat das effektive Potential den Wert

$$\tilde{V}_{\mathrm{eff}} = V_{\mathrm{eff}}(r_0) = \frac{L^6}{6m^3C^2}\,.$$

(b) Schauen wir uns zunächst den Verlauf des effektiven Potentials in einer Skizze an.

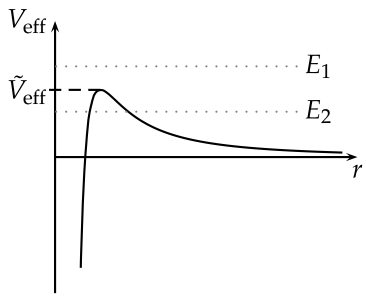


Abbildung 1: Qualitativer Verlauf des effektiven Potentials

Wenn die Energie des Teilchens kleiner als $\tilde{V}_{\mathrm{eff}}$ ist (z.B. E_2), dann nähert es sich nur bis zu einem minimalen Radius an, und verschwindet wieder ins Unendliche. Für Energien, die größer als das Maximum sind (z.B E_1), wird das Teilchen in das Zentrum stürzen und nicht wieder freigegeben. Für einen Streuprozess sind die beiden Parameter die Geschwindigkeit im Unendlichen v_∞ und der Stoßparameter b. Mit diesen beiden Größen lauten Energie und Drehimpuls

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \qquad \text{bzw.} \qquad L = mv_\infty b\,.$$

Damit finden wir als Bedingung für den Einfang des Teilchen

$$\begin{aligned} E &> \tilde{V}_{\text{eff}} \\ \frac{m}{2}v_\infty^2 &> \frac{(mv_\infty b)^6}{6m^3C^2} \\ b_{\max} \equiv \left(\frac{3C^2}{m^2v_\infty^4}\right)^{\frac{1}{6}} &> b\,. \end{aligned}$$

Damit lautet der Wirkungsquerschnitt für das Einfangen des Teilchens

$$\sigma = \pi b_{\max}^2 = \pi\left(\frac{3C^2}{m^2v_\infty^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Es erscheint sinnvoll, dass er mit C wächst und mit steigendem v_∞ kleiner wird.

3. **Trägheitstensor einer unendlich schweren Massenverteilung.** Auf der x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems seien unendlich viele gleich schwere Massen $m > 0$ verteilt. Die j-te Masse befindet sich am Ort $\left(Ra^{(j-1)/2}, 0, 0\right)$ mit $R > 0$ und $0 < a < 1$. Das beschriebene System ist unendlich schwer. Wie groß ist die Komponents Θ_{zz} des Trägheitstensors? (2 Pkt.)

Lösung: Da sich die Massen um den Ursprung konzentrieren, liegt dort auch der Schwerpunkt. Damit ist

$$\Theta_{zz} = \sum_{j=1}^{\infty} m_j\left(r_j^2\delta_{zz} - z_j^2\right),$$

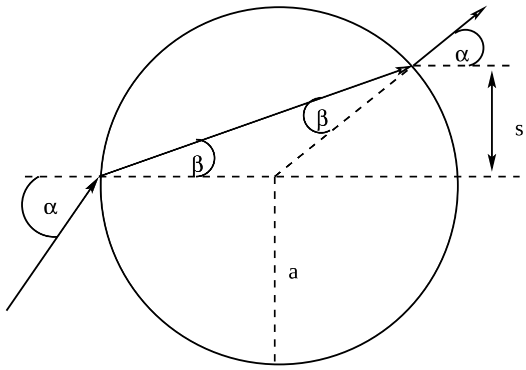
mit $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} \Theta_{zz} &= m\sum_{j=1}^{\infty}\left(R^2a^{j-1}\right) \\ &= mR^2\sum_{j'=0}^{\infty} a^{j'} \text{ (geometrische Reihe, konvergent wegen } a<1\text{)} \\ &= \frac{mR^2}{1-a}. \end{aligned}$$

Zumindest diese Komponente des Trägheitstensors ist also endlich trotz unendlicher Masse.

4. **Streuung am Potentialtopf.** Ein Teilchen der Masse m wird an einer sphärischen Potentialmulde mit Radius a und „Tiefe“ U_0 gestreut. Das Potential hat also die Form (3 Pkt.)

$$U = \begin{cases} 0 & \text{für } r > a \\ -U_0 & \text{für } r < a \end{cases}\,.$$



(a) Bestimmen Sie zuerst einen Zusammenhang zwischen α und β in der Form

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n(v_\infty, m, U_0)\,.$$

(b) Berechnen sie den Stoßparameter s als Funktion von χ, a und n.

(c) Wie lautet damit der differentielle Wirkungsquerschnitt?

(d) Bestimmen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt. Beachten Sie dabei, dass χ nicht jeden Wert $\in [0, \pi]$ annehmen kann.

Lösung:

(a) Da das hier vorliegende Potential rotationssymmetrisch ist, wird die Impulskomponente des Teilchens, die parallel zur Grenzfläche ist, beim Eintritt in das Potential erhalten bleiben. Deshalb gilt

$$v_\infty \sin\alpha = v_{U_0} \sin\beta$$

Aus der geltenen Energieerhaltung erhalten wir eine Relation zwischen den Geschwindigkeiten im und außerhalb des Potentialtopfs. Mit

$$\frac{m}{2}\,v_\infty^2 = \frac{m}{2}\,v_{U_0}^2 - U_0$$

finden wir

$$v_{U_0} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\,U_0}{m}}\,.$$

Das führt uns auf den Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \qquad \text{mit } n = \sqrt{1 + \frac{2\,U_0}{m\,v_\infty^2}}\,.$$

(b) Wie wir der Skizze entnehmen, ist der Streuwinkel gerade

$$\chi = 2\,(\alpha - \beta)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin(\alpha - \frac{\chi}{2})}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \cot\alpha \sin\frac{\chi}{2}\,.$$

Verwenden wir den aus der Skizze zu entnehmenden Zusammenhang

$$a\,\sin\alpha = s$$

um $\sin\alpha$ zu eliminieren, finden wir nach kurzer Rechnung

$$s = \pm\frac{a\,n\,\sin\frac{\chi}{2}}{\sqrt{n^2 - 2\,n\,\cos\frac{\chi}{2} + 1}}\,.$$

(c) Damit können wir nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{s\left|\frac{\partial s}{\partial \chi}\right|}{\sin\chi} = \frac{a^2\, n^2}{4\,\cos\frac{\chi}{2}}\,\frac{\left(n\,\cos\frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2\,n\,\cos\frac{\chi}{2}\right)^2}$$

(d) Bevor wir den total Wirkungsquerschnitt berechnen können, müssen wir zunächst das Intervall berechnen, in dem χ liegen kann. Es ist sofort klar, dass für $\alpha = 0$ auch $\chi = 0$ gelten muss. Für $s = a$ tritt sicherlich die größte Streuung auf. In diesem Fall ist $\cot\alpha = 0$ und der maximale Streuwinkel genügt

$$\cos\frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}\,.$$

Damit erhalten wir für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = 2\,\pi\int_0^{\chi_{max}} \sin\chi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\chi = \pi\,a^2\,.$$

Um die Integration auszuführen, haben wir $\sin\chi = 2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}$ und die Substitution $x = \cos\frac{\chi}{2}$ benutzt. Der Wirkungsquerschnitt entspricht hier natürlich auch dem geometrischen Querschnitt, auf den das Potential begrenzt ist.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 16. 12. 2008.