1. **Transformation Körperachsen auf Raumachsen.** In der Vorlesung wurde diskutiert, das die Nutationsbewegung des schweren, symmetrischen Kreisels auch dann auftritt, wenn man $g = 0$ setzt. Zeigen Sie, dass hier kein Wiederspruch zur Behandlung des freien, symmetrischen Kreisels vorliegt. (4 Pkt.)
   (a) Stellen Sie dazu mit den Eulerschen Winkeln die Matrix $\hat{A}$ auf, die die körperfesten Koordinaten eines Vektors auf raumfeste Koordinaten transformiert.
   (b) Bestimmen Sie dann die raumfesten Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$ eines symmetrischen Kreisels.
   (c) Bestimmen Sie die raumfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Lösung:

(a) Die gesuchte Transformationsmatrix A macht die durch die Eulerschen Winkel gekennzeichnete Drehung des körperfesten Koordinatensystem rückgängig. Dazu betrachten wir das Produkt der folgenen 3 Matrizen, welche jeweils eine Drehung rückgängig machn:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix A^T beschreibt die inverse Transformation vom Inertialsystem auf das körperfeste Koordinatensystem.

(b) Verwendet man die Hauptträgheitsachsen als körperfeste Koordinatenachsen, so lauten die körperfesten Drehimpulskomponenten eines symmetrischen Kreisels.

$$\vec{L}_{KS} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1(\sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta}) \\ \Theta_2(\sin\theta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta}) \\ \Theta_3(\cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi}) \end{pmatrix}$$

Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\omega_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\omega_\theta = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\omega_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Die Matrix A angewendet auf $\vec{L}_{KS}$ liefert den Drehimpuls im raumfesten Koordinatensystem ($\Theta_1 = \Theta_2$):

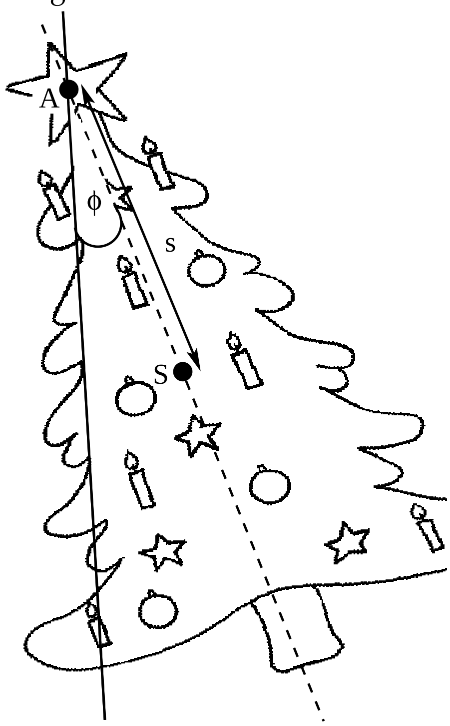
$$\vec{L}_{IS} = A \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_\psi - \Theta_1\cos\theta\dot{\phi})\sin\phi\sin\theta + \Theta_1\cos\phi\dot{\theta} \\ -(p_\psi - \Theta_1\cos\theta\dot{\phi})\cos\phi\sin\theta + \Theta_1\sin\phi\dot{\theta} \\ p_\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} p_\phi &= \quad \Theta_1 \sin^2\theta\dot{\phi} + p_\psi \cos\theta \\ p_\psi &= \quad \Theta_3(\cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi}) \end{aligned}$$

(c) Wir setzen in (b) $\Theta_1 = \Theta_3 = \Theta$ und erhalten die raumfesten Komponenten von $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_{IS}}{\Theta} = \begin{pmatrix} \sin\phi\sin\theta\dot{\psi} + \cos\phi\dot{\theta} \\ -\cos\phi\sin\theta\dot{\psi} + \sin\phi\dot{\theta} \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

2. **Physikalisches Pendel.** Ein starrer Körper befinde sich im homogenen Schwerefeld der Erde und sei um eine horizontale Achse A drehbar aufgehängt. Der Schwerpunkt S des Körpers liege nicht auf der Achse. Wieviele Freiheitsgrade hat das physikalische Pendel?



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel φ auf und berechnen Sie die Schwingungsdauer für kleine Auslenkungen. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass sich die Schwingungsdauer des Fadenpendels ergibt, wenn die Masse des Körpers eng um seinen Schwerpunkt konzentriert ist. (1 Pkt.)

(c) Bestimmen Sie eine zweiten Achse, die dieselbe Schwingungsdauer ergibt. (1 Pkt.)

(d) Nehmen Sie an, der Körper sei ein Würfel mit homogener Massendichte (Kantenlänge a, Masse m), und die Drehachse verlaufe entlang einer Kante. Wie lautet die Schwingungsdauer für kleine Auslenkungen? Wie lang wäre ein äquivalentes Fadenpendel? (2 Pkt.)

(insgesamt 6 Pkt.)

Lösung: Allgemein hat ein starrer Körper sechs Freiheitsgrade: drei der Translation und drei der Rotation. Bei Drehungen um eine feste Achse gibt es keine Translation und die Richtung der Achse legt zwei Rotationsfreiheitsgrade fest. Bleibt ein Freiheitsgrad, der Drehwinkel φ um die Achse.

(a) In konservativen Systemen mit nur einem Freiheitsgrad reicht der Energiesatz zum Aufstellen der Bewegungsgleichung:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - Mgs\cos\varphi = \text{const.}$$

wobei J das Trägheitsmoment um die Achse A ist. Für die potentielle Energie durften wir annehmen, dass die Masse m des physikalischen Pendels im Schwerpunkt S konzentriert ist. Ableiten nach t und Division durch $J\dot{\varphi}$ liefert die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J}\sin\varphi = 0\,.$$

Für kleine Auslenkwinkel gilt $\sin\varphi \approx \varphi$, mit harmonischen Schwingungen der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgs}} =: 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Man nennt $l = \frac{J}{ms}$ die *reduzierte Fadenlänge*.

(b) Nach dem Steiner'schen Satz ist

$$J = ms^2 + \tilde{J}\,,$$

wobei $\tilde{J}$ das Trägheitsmoment ist, das man bei einer Parallelverschiebung der Drehachse in den Schwerpunkt erhalten würde. Ist speziell die ganze Masse eng um den Schwerpunkt konzentriert, d. h., $ms^2 \gg \tilde{J}$, so ergibt sich für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels der Länge s:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ms^2 + \tilde{J}}{mgs}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}\,.$$

(c) Der Punkt A', der auf der Geraden AS die Entfernung l von A hat, heißt *Schwingungsmittelpunkt*. Macht man den Schwingungsmittelpunkt A' zum neuen Aufhängepunkt, so bleibt die Schwingungsdauer die gleiche. Jetzt wird A zum neuen Schwingungsmittelpunkt, denn für l gilt

$$l = \frac{\tilde{J}}{ms} + s\,.$$

Zu einem gegebenen l gehören zwei s-Werte, nämlich die Wurzeln der quadratischen Gleichung $s^2 - ls + \tilde{J}/m = 0$. Für die Lösungen dieser quadratischen Gleichung gilt (Satz von Vieta)

$$s_1 + s_2 = l\,, \qquad s_1 s_2 = \frac{\tilde{J}}{m}\,.$$

Alle gesuchten Aufhängepunkte liegen also auf zwei Kreisen mit den Radien s_1 und s_2 um den Schwerpunkt. Aus $s_1 + s_2 = l$ folgt obige Behauptung. Sucht man daher zwei Aufhängepunkte A und A' auf, die mit dem Schwerpunkt auf einer Geraden liegen (und zwar auf verschiedenen Seiten des Schwerpunktes und in ungleichem Abstand von demselben) und die gleiche Schwingungsdauer ergeben, so ist deren gegenseitige Entfernung gleich der reduzierten Pendellänge l. Aus l und T kann g präzise gemessen werden (*Reversionspendel*). Ist der Schwerpunkt bekannt, so kann das Trägheitmoment $\tilde{J}$ berechnet werden.

(d) Annnahme: Die Drehachse verlaufe entlang der z-Achse des Würfels.

$$J = \int \rho(\vec{r})(x^2+y^2)\,\mathrm{d}^3r = \rho_0 \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho_0 a^2 \frac{a^3}{3} 2$$

Für die Masse $m = \rho_0 \cdot a^3$ gilt

$$J = \frac{2}{3} m a^2 \,.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist $s = a\sqrt{2}/2$. Die Schwingungsdauer für kleine Auslenkungen lautet damit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{3\sqrt{2}g}}$$

und die reduzierte Pendellänge ist

$$l = \frac{4}{3\sqrt{2}} a \approx 0{,}94280904 \cdot a \,.$$

3. **Schneller Kreisel.** Der schnelle Kreisel ist ein Spezialfall des schweren Kreisels: Die kinetische Energie ist wesentlich größer als die maximalen Änderungen der potentiellen Energie, so daß die Gravitationskonstante g als klein anzusehen ist und sich die Bewegung nicht sehr von der eines kräftefreien Kreisels unterscheidet. Eine einfache analytische Berechnung der Bewegung ist hier näherungsweise möglich. (4 Pkt.)

Die Anfangsbedingungen seien $\dot{\phi}(0) = \dot{\vartheta}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_2 = \text{const.}$

(a) Leiten Sie eine Relation zwischen den beiden erhaltenen Drehimpulsen L_3 und L_z her.

(b) Setzen Sie diese Relation in die Gleichung des effektiven Potentials ein. Warum ist ϑ_2 ein Umkehrpunkt der Bewegung im effektiven Potential? Berechnen Sie die Amplitude der Nutation, wobei Sie sich zunutze machen, das bei ϑ_2 ein Umkehrpunkt liegt. Hierbei dürfen Sie annehmen, dass g klein ist, d.h. Terme proportional zu $1/g$ sind in auftretenden Gleichungen dominant.

(c) Bestimmen Sie die Nutationsfrequenz. Leiten Sie dazu wieder unter der Annahme eines kleinen g eine Differentialgleichung für $\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta$ her und lösen Sie diese. Es kann $\sin\vartheta \approx \sin\vartheta_2$ angenommen werden.

Lösung:

(a) Die Anfangsbedingungen besagen, dass der Kreisel mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um seine Symmetrieachse rotiert, die erst festgehalten und dann bei $t = 0$ losgelassen wird.

Aus den Anfangsbedingungen $\dot{\phi}(0) = 0$ und $\theta(0) =: \theta_2$ folgt für den Drehimpuls (siehe 1. Aufgabe):

$$p_\phi = p_\psi \cos\theta_2.$$

Wir betrachten das effektive Potential aus (17.6) aus der Vorlesung.

Da θ_2 ein Umkehrpunkt der Bewegung ist, gilt $V_{\text{Eff}}(\cos\theta_2) = 0$.Daraus folgt:

$$\frac{2\Theta_3 E - p_\psi^2}{\Theta_1\Theta_3} - \frac{2mgl}{\Theta_1}\cos\theta_2 = 0$$

Wir setzen die beiden Gleichungen in $V_{\text{Eff}}(\cos\theta)$ ein und erhalten:

$$V_{\text{Eff}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2mgl}{\Theta_1}\sin^2\theta - \frac{p_\psi^2}{\Theta_1^2}(\cos\theta_2 - cos\theta)\right)(\cos\theta_2 - \cos\theta)$$

Das effektive Potential besitz 3 Nullstellen, von der $\cos\theta_2$ sofort abgelsen werden kann. Wir setzen: $a_{1/3} := \cos\theta_2 - \cos\theta_{1/3}$. Es gilt damit zu lösen:

$$a_{1/3}^2 + \left(\frac{p_\psi^2}{2mgl\Theta_1} - 2\cos\theta_2\right)a_{1/3} - \sin^2\theta_2 = 0$$

Da g als klein angesehen werden kann kann der Ausdruck $2\cos\theta_2$ in der Klammer vernachlässigt werden. Wir erhalten die Nullstellen:

$$a = -\frac{p_\psi^2}{4mgl\Theta_1}\left(1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{4mgl\Theta_1}{p_\psi^2}\right)^2 \sin^2\theta_2}\right)$$

$$a = -\frac{p_\psi^2}{4mgl\Theta_1}\left(1 \mp 1 + 8\left(\frac{mgl\Theta_1}{p_\psi^2}\right)^2 \sin^2\theta_2 + ...\right)$$

Nur

$$a_1 = \cos\theta_2 - \cos\theta_1 = \frac{2ml\Theta_1}{p_\psi^2} g\sin^2\theta_2 \tag{5}$$

liegt im physikalischen Bereich. Folglich ist die Nutationsamplitude a_1 um so kleiner, je schneller der Kreisel und je kleiner g ist.

(b) Da die Nutationsamplitude a_1 klein ist (g klein), kann $\sin^2\theta$ im effektiven Potential durch $\sin^2\theta_2$ ersetzt werden. Mit der Definition

$$a(t) := \cos\theta 2 - \cos\theta(t) \tag{6}$$

folgt für das effektive Potential:

$$V_{\text{Eff}}(a) = -\frac{1}{2}\dot{a}^2 = -\frac{1}{2}a\left(\frac{2mgl}{\Theta_1}\sin^2\theta_2 - \frac{p_\psi^2}{\Theta_1^2}a\right)$$

Die Integration dieser Differenzialgleichung für $a(t)$ liefert mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0$:

$$a(t) = \frac{a_1}{2}\left(1 - \cos\frac{p_\psi}{\Theta_1}t\right)$$

folglich lautet die von g unabhängige Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{p_\psi}{\Theta_1} = \frac{\Theta_3}{\Theta_1}\dot{\psi}(0).$$

(c) Aus der Vorlesung bekannt ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\Theta_1 \sin^2\theta} = \frac{p_\psi(\cos\theta_2 - \cos\theta)}{\Theta_1 \sin^2\theta} \underset{\theta\approx\theta_2}{\approx} \frac{p_\psi a(t)}{\Theta_1 \sin^2\theta_2}$$

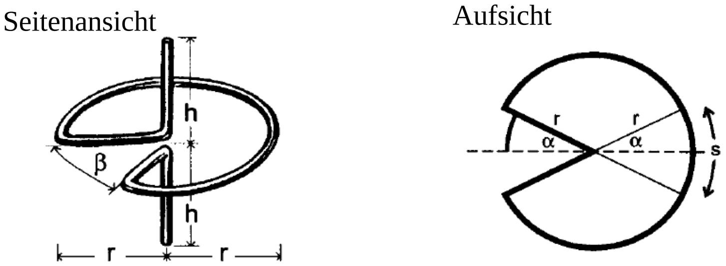
$$\dot{\phi} \underset{Gl.(5),(5)}{=} \frac{mgl}{p_\psi}\left[1 - \cos\left(\frac{p_\psi}{\Theta_1}t\right)\right]$$

Die mittlere Präzisionsfrequenz ist damit

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{mgl}{p_\psi} = \frac{mgl}{\Theta_3\dot{\psi}(0)}$$

Die Präzision ist nicht gleichförmig, sondern ändert sich mit der Nutationsfrequenz näherungsweise harmonisch mit der Zeit.

4. **Büroklammerkreisel.** Aus einer Büroklammer lässt sich mit etwas Geschick (und einer Zange) ein Kreisel herstellen (vgl. Abbildung). (2 Pkt.)



(a) Im einfachsten Fall liegt der Schwerpunkt des Kreisels im Mittelpunkt des Kreisbogens. Berechnen Sie, wie groß dann der Öffnungswinkel β sein muss.

(b) Berechnen Sie die Trägheitsmomente bezüglich Rotation um die x-, y- und z-Achse. Nehmen Sie dazu die Drahtstücke als unendlich dünn an. Wann ist die Rotation um die z-Achse stabil?

Wer einen funktionierenden Büroklammerkreisel mitbringt, erhält einen Extrapunkt!

Lösung:

(a) Die geraden Drahtstücke oberhalb und unterhalb des Kreisbogens können ignoriert werden, da sie symmetrisch bezüglich des Kreisbogens liegen und ihre Beiträge zum Schwerpunkt sich gerade kompensieren. Es sind also nur die geraden Speichen und der gegenüberliegende Kreisbogen s zu berücksichtigen. Wir legen den Koordinatenursprung in den Kreismittelpunkt. Dann ist der Schwerpunkt der Speichen

$$x_S = \frac{r}{2}\cos(\beta/2) \equiv \frac{r}{2}\cos\alpha.$$

m_S ist die Masse der Speichen. Diese kann bei konstanter Dichte pro Längeneinheit ρ der Büroklammer aus $m_S = 2r\rho$ berechnet werden. Der Schwerpunkt des Kreisbogens s liegt bei

$$x_K = \frac{1}{s}\int \mathrm{d}s x = \frac{1}{s}\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\phi r r\cos\phi = \frac{r\sin\alpha}{\alpha},$$

da $s = 2r\alpha$ (Bogenlänge eines Kreisbogens). Die Masse des Kreisbogens ist $m_K = s\rho = 2r\alpha\rho$. Aus der Gleichgewichtsbedingung $m_S x_S = m_K x_K$ folgt

$$2r^2\rho\sin\alpha = r^2\rho\cos\alpha \rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2},$$

damit ist $\beta = 2\alpha \approx 53,13°$.

(b) Wir machen die Rechnung in Zylinderkoordinaten (s, ϕ, z) und betrachten die Drahtstücke als unendlich dünn. Allgemein kann jedes Trragheitsmoment wie folgt zerlegt werden:

$$\begin{aligned} J_z &= \int \mathrm{d}^3r\rho(x,y,z)(x^2+y^2) \\ &= \int_{\text{Kreisbogen}} \mathrm{d}^3r\rho(x,y,z)(x^2+y^2) + \int_{\text{Speichen}} \mathrm{d}^3r\rho(x,y,z)(x^2+y^2) \\ &\quad + \int_{\text{Stücke ober-/unterhalb}} \mathrm{d}^3r\rho(x,y,z)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

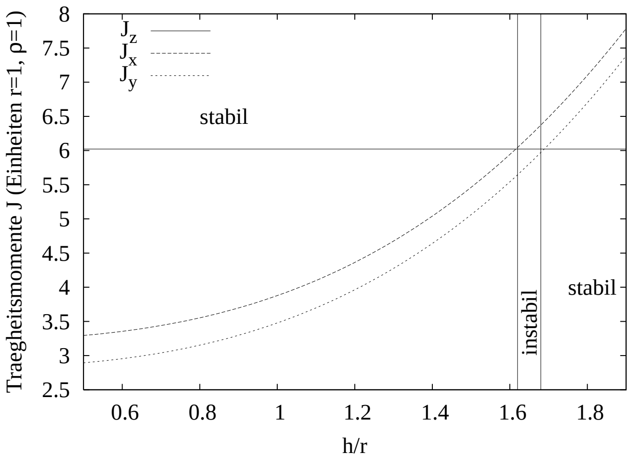
(analog für J_x, J_y). Da die jeweiligen Drahtstücke unendlich dünn sind, wird jedes Integral zu einem eindimensionalen Integral. Damit folgt:

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z,\text{Speiche}} + J_{z,\text{Kreisbogen}} + J_{z,\text{oben/unten}} \\ &= 2\int_0^r \mathrm{d}s\rho(s^2\sin^2\alpha + s^2\cos^2\alpha) + 2\int_\alpha^\pi \mathrm{d}\phi r\rho(r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi) + 0 \\ &= 2\rho r^3\left(\frac{1}{3} + \pi - \alpha\right), \end{aligned}$$

analog folgen

$$\begin{aligned} J_x &= 2\rho r^3\left(\frac{\sin^2\alpha}{3} + \frac{\pi-\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{h^3}{3r^3}\right), \\ J_y &= 2\rho r^3\left(\frac{\cos^2\alpha}{3} + \frac{\pi-\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{h^3}{3r^3}\right). \end{aligned}$$

Die Rotation um die z-Achse ist instabil, wenn J_z weder das größte noch das kleinste der drei Trägheitsmomente ist, d.h. zwischen J_x und J_y liegt. Wann das der Fall ist, hängt vom Verhältnis h/r ab. Für das in Teil (a) berechnete α ist stets $J_y < J_x$; es ist $J_x = J_z$ bei $h/r = 1,62$ und $J_y = J_z$ bei $h/r = 1,68$. Aus dem Plot (Abbildung) ist erkennbar, das die Rotation um die z-Achse dann für $h/r < 1,62$ bzw. $h/r > 1,68$ stabil ist.



Wir wünschen allen TeilnehmerInnen der Veranstaltung frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!
Auf diesem Übungsblatt sind maximal **16 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 13. 1. 2009.