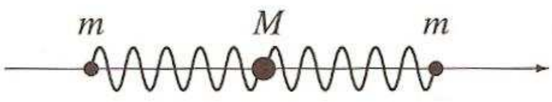
1. **Phasenraumportrait eines Fadenpendels.** Eine Masse m sei an einer masselosen Stange der Länge l aufgehängt, so dass sie unter dem Einfluss des homogenen Gravitationsfeldes in der x-y-Ebene Schwingungen vollführen kann.
   (a) Stellen Sie Lagrange- und Hamilton-Funktion des Fadenpendels auf. Wählen Sie den Auslenkungswinkel gegenüber der Ruhelage als verallgemeinerte Koordinate. (1 Pkt.)
   (b) Zeichnen und diskutieren Sie die möglichen Phasenraumtrajektorien des Fadenpendels in Abhängigkeit von der Gesamtenergie E. Unterscheiden Sie insbesondere die Fälle (3 Pkt.)
      i. $E = 0$,
      ii. $E \ll mgl$,
      iii. $E < 2mgl$,
      iv. $E > 2mgl$ und
      v. $E = 2mgl$.

      Gibt es Punkte im Phasenraum, in denen sich Trajektorien schneiden?

   (insgesamt 4 Pkt.)

2. **Dreiatomiges Molekül.** Betrachten Sie ein einfaches Modell eines Kohlenstoffdioxid-Moleküls (Skizze). Die Atome sollen sich hierbei nur in einer Dimension bewegen können. Der Gleichgewichtsabstand der Sauerstoffatome zum Kohlenstoffatom sei a.



   (a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form (2 Pkt.)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j \right)$$

   und bestimmen sie die Koeffizienten T_{ij} und V_{ij}.
   (b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenfrequenzen und Eigenvektoren. (1 Pkt.)
   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung. (1 Pkt.)

   (insgesamt 4 Pkt.)

3. **Eindimensionales Kristallmodell.** Betrachten Sie eine unendlich lange, eindimensionale Kette als ein einfaches Modell eines Kristalls. Die Massen $m_j \equiv m$ mit $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ können sich längs der x-Achse bewegen. Federn mit den Federkonstanten $D_j \equiv D$ sorgen für rücktreibende Kräfte zwischen benachbarten Massen; dies definiert Gleichgewichtslagen $r_j = ja$. (2 Pkt.)
   (a) Bestimmen Sie Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen u_j aus diesen Gleichgewichtslagen. Begründen Sie den Ansatz

$$u_j(t) = Ae^{-i(\omega t - q r_j)},$$

   und lösen Sie damit die Bewegungsgleichungen. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen ω und q („Dispersionsrelation"), und begründen Sie, warum es genügt, $q \in (-\pi/a, \pi/a]$ („1. Brillouin-Zone") zu betrachten.

(b) Was ändert sich, wenn die Federkonstanten alternierend die Werte D_1 und $D_2 \neq D_1$ haben? Ändern Sie den Lösungsansatz aus (a) entsprechend ab, und diskutieren Sie auch hier $\omega(q)$.

4. **Kraftstoß auf Oszillator.** Ein Oszillator ruht in seiner Gleichgewichtslage. Dann bekommt er einen Kraftstoß (2 Pkt.)

$$f(t) = \begin{cases} v_0/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Auslenkung $x(t)$. Diskutieren Sie die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \gg \frac{1}{\lambda}$, und skizzieren Sie hierfür die Lösungen

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 20. 1. 2009.