1. **Phasenraumportrait eines Fadenpendels.** Eine Masse m sei an einer masselosen Stange der Länge l aufgehängt, so dass sie unter dem Einfluss des homogenen Gravitationsfeldes in der x-y-Ebene Schwingungen vollführen kann.
   (a) Stellen Sie Lagrange- und Hamilton-Funktion des Fadenpendels auf. Wählen Sie den Auslenkungswinkel gegenüber der Ruhelage als verallgemeinerte Koordinate. (1 Pkt.)
   (b) Zeichnen und diskutieren Sie die möglichen Phasenraumtrajektorien des Fadenpendels in Abhängigkeit von der Gesamtenergie E. Unterscheiden Sie insbesondere die Fälle (3 Pkt.)
      i. $E = 0$,
      ii. $E \ll mgl$,
      iii. $E < 2mgl$,
      iv. $E > 2mgl$ und
      v. $E = 2mgl$.

   Gibt es Punkte im Phasenraum, in denen sich Trajektorien schneiden?

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Mit der potentiellen bzw. kinetischen Energie

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}, \qquad V = mgl(1 - \cos\varphi)$$

folgen die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi)\,.$$

Daraus leiten wir den verallgemeinerten Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

und die Hamilton-Funktion

$$H = p_\varphi \varphi - L = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\varphi)$$

ab.

(b) Wegen $\partial H/\partial t = 0$ ist die Gesamtenergie $H = E$ eine Erhaltungsgröße. Aus dem Energiesatz

$$E = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\varphi)$$

folgt die Form der Phasenraumtrajektorien zu

$$\frac{p_\varphi}{\sqrt{2m^2gl^3}} = \pm\sqrt{\frac{E}{mgl} - 1 + \cos\varphi}\,.$$

i. Falls $E = 0$ kann der Auslenkungswinkel nur ein Vielfaches von π sein. Das Pendel befindet sich also in seiner stabilen oder instabilen Ruhelage.

ii. Für eine positive Gesamtenergie, die aber noch immer sehr viel kleiner als mgl ist, sind nur Schwingungen mit der kleiner Amplitude möglich. Wir verwenden darum $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ und erhalten Ellipsen als Phasenraumtrajektorien.

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2E} + \frac{mgl\varphi^2}{2E} = 1$$

Das Pendel schwingt annähernd harmonisch.

iii. Mit wachsender Energie, werden die Schwingungen des Pendels immer anharmonischer. Die Phasenraumtrajektorien sind aber zunächst noch geschlossen. Man spricht auch von Libration.

iv. Ist die Gesamtenergie größer als $2mgl$, so überschlägt sich das Pendel und die Phasenraumtrajektorien sind nicht mehr geschlossen. Man spricht auch von Rotation.

v. Im Grenzfall $E = 2mgl$, der Rotation und Libration trennt, hat die Phasenraumtrajektorie die Gestalt

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2E} = \pm\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,.$$

(Halbwinkelformel $\cos^2(\varphi/2) = (1 + cos\varphi)/2$ verwendet) Diese Kurve heißt auch Seperatrix, da sie das Phasenraumgebiet der Rotation von dem der Libration trennt.

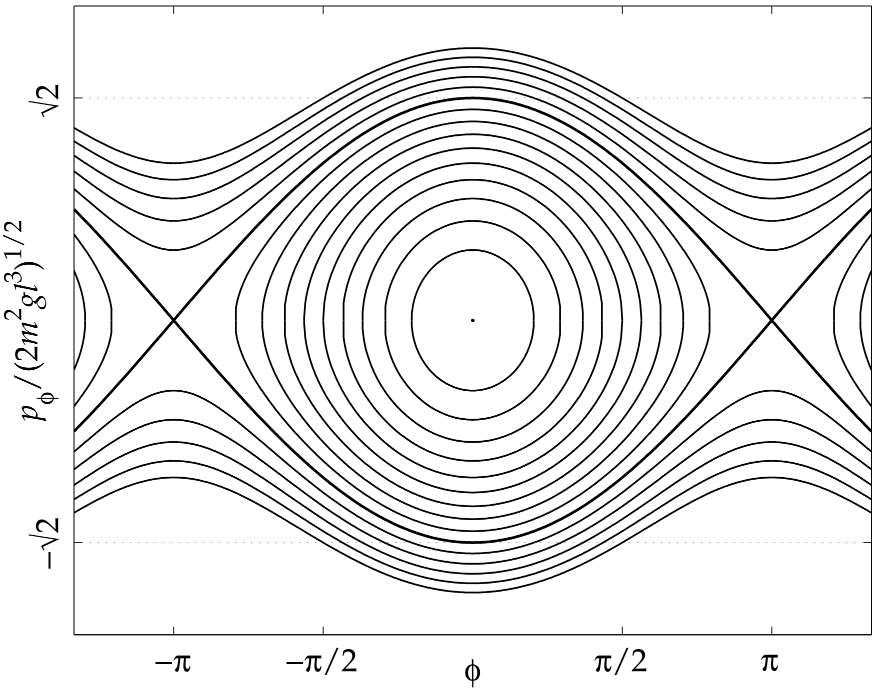
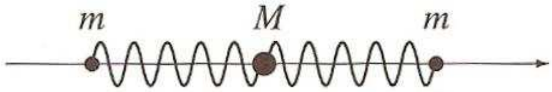


Abbildung 1: Phasenraumtrajektorien des Fadenpendels für verschiedene Werte der Gesamtenergie E.

Phasenraumtrajektorien schneiden sich nie, auch nicht die des Fadenpendels. Bewegt sich ein Pendel auf der Seperatrix, so nähert es sich den beiden Punkten $(\varphi, p_\varphi/\sqrt{2m^2gl^3}) = (\pm\pi, 0)$ nur asymptotisch. Diese Punkte sind also nicht Teil der Seperatrix selbst.

2. **Dreiatomiges Molekül.** Betrachten Sie ein einfaches Modell eines Kohlenstoffdioxid-Moleküls (Skizze). Die Atome sollen sich hierbei nur in einer Dimension bewegen können. Der Gleichgewichtsabstand der Sauerstoffatome zum Kohlenstoffatom sei a.



(a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form (2 Pkt.)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j\right)$$

und bestimmen sie die Koeffizienten T_{ij} und V_{ij}.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenfrequenzen und Eigenvektoren. (1 Pkt.)

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung. (1 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Die Positionen der Atome des Moleküls kennzeichnen wir mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3. Der Gleicgewichtsabstand zwischen benachbarten Atomen sei a, also:

$$x_2^0 - x_1^0 = a \qquad x_3^0 - x_2^0 = a$$

Damit sind lediglich zwei der drei Größen x_1^0, x_2^0, x_3^0 festgelegt, damit führen wir ein: $y_i = y_i^0$, mit y_i^0 - Gleichgewichtszustand. Für das Potential gilt:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \tfrac{k}{2}\left[(x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2\right] \\ &= \tfrac{k}{2}\left[(y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2\right] \end{aligned}$$

Die kinetische Energie lautet :

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{M}{2}\left(\dot{x}_2^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{y}_2^2$$

Damit ist die Lagrangefunktion von der Form:

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(T_{ij}\dot{y}_i\dot{y}_j - V_{ij}y_iy_j\right)$$

Die Koeffizienten T_{ij} und V_{ij} können hieraus abgelesen werden.

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad V = (V_{ij}) = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

(b) Die Bedingung für die Eigenfrequenzen lautet:

$$det\left(V-\omega^2 T\right) = \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= (k-\omega^2 m)^2(2k-\omega^2 M) - 2k^2(k-\omega^2 m) \\ &= \omega^2(k-\omega^2 m)\left(\omega^2 Mm - k(2m+M)\right) \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$$

Die Eigenvektoren folgen aus$(V-\omega_k^2 T)A^k = 0$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition der Lösungen:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(b_1 t + a_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} B_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} B_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3)$$

3. **Eindimensionales Kristallmodell.** Betrachten Sie eine unendlich lange, eindimensionale Kette als ein einfaches Modell eines Kristalls. Die Massen $m_j \equiv m$ mit $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ können sich längs der x-Achse bewegen. Federn mit den Federkonstanten $D_j \equiv D$ sorgen für rücktreibende Kräfte zwischen benachbarten Massen; dies definiert Gleichgewichtslagen $r_j = ja$. (2 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen u_j aus diesen Gleichgewichtslagen. Begründen Sie den Ansatz

   $$u_j(t) = Ae^{-i(\omega t - q r_j)},$$

   und lösen Sie damit die Bewegungsgleichungen. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen ω und q („Dispersionsrelation“), und begründen Sie, warum es genügt, $q \in (-\pi/a, \pi/a]$ („1. Brillouin-Zone“) zu betrachten.

   (b) Was ändert sich, wenn die Federkonstanten alternierend die Werte D_1 und $D_2 \neq D_1$ haben? Ändern Sie den Lösungsansatz aus (a) entsprechend ab, und diskutieren Sie auch hier $\omega(q)$.

Lösung:

(a) Wir setzen $u_j = x_j - r_j$, wobei x_j die Position des j-ten Massenpunkts ist. Die

Bewegungsgleichung des j-ten Massenpunkts ist dann

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u}_j &= (\text{Kraft vom Massenpunkt } j+1) + (\text{ Kraft vom Massenpunkt } j-1) \\
&= D(u_{j+1} - u_j) + D(u_{j-1} - u_j) \\
&= D(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}).
\end{aligned}
$$

Der Ansatz beschreibt in exponentieller Form den üblichen Ansatz $A\cos(\omega t + \alpha)$, wobei lediglich die Phase durch eine Größe q charakterisiert wurde. Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
-m\omega^2 A e^{-i(\omega t - q r_j)} &= D A e^{-i\omega t}\left(e^{iqr_{j+1}} - 2e^{iqr_j} + e^{iqr_{j-1}}\right) \\
\to \omega^2 &= \frac{2D}{m}(1 - \cos(qa)).
\end{aligned}
$$

Es ist also $\omega = \omega(q) = \sqrt{\frac{2D}{m}(1-\cos(qa))}$. Da der Cosinus periodisch ist, ist diese Funktion periodisch mit der Persiode $2\pi/a$, und es genügt, $q \in (-\pi/a, \pi/a]$ zu betrachten.

(b) Nun sind die Positionen x_j und $x_{j\pm 1}$ nicht mehr äquivalent (wohl aber x_j und $x_{j\pm 2}$ usw.). Für beide Arten vom Plätzen gibt es unterschiedliche Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u}_{2j} &= D_1(u_{2j+1} - u_{2j}) + D_2(u_{2j-1} - u_{2j}) \\
m\ddot{u}_{2j-1} &= D_2(u_{2j} - u_{2j-1}) + D_1(u_{2j-2} - u_{2j-1}).
\end{aligned}
$$

Wir machen also auch einen Ansatz, der Schwingungen mit verschiedenen Amplituden berücksichtigt:

$$
U_{2j}(t) = A e^{-i(\omega t - q r_{2j})},\ u_{2j+1}(t) = B e^{-i(\omega t - q r_{2j+1})}.
$$

Es folgt das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
A(-m\omega^2 + D_1 + D_2) + B(-D - 1e^{iqa} - D_2 e^{-iqa}) &= 0 \\
A(-D_2 e^{iqa} - D_1 e^{-iqa}) + B(-m\omega^2 + D_2 D_1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus den Nullstellen der Koeffizientendeterminante:

$$
0 = (-m\omega^2 + D_1 + D_2)^2 - (D_1^2 + D_2^2 + 2D_1 D_2 \cos(2qa))
$$

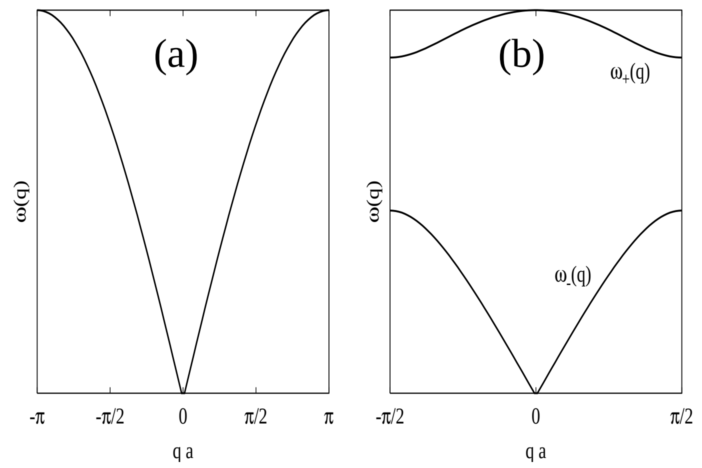
zu

$$
\omega_\pm^2 = \frac{1}{m}\left(D_1 + D_2 \pm \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + 2D_1 D_2 \cos(2qa)}\right).
$$

In der Dispersionsrelation $\omega(q)$ gibt es zwei Zweige, sie lassen sich durch das Verhalten bei $q \to 0$ charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
&\omega_+(q=0) = \sqrt{2(D_1+D_2)/m} \neq 0 \ (\text{„optischer Zweig“}), \\
&\omega_-(q=0) = 0 \ (\text{„akustischer Zweig“}).
\end{aligned}
$$

Die Dispersionsrelation ist jetzt π/a-periodisch, die 1. Brillouinzone gegenüber Teil (a) halbiert: Es genügt, $q \in (-\pi/2a, \pi/2a]$ zu betrachten. (Das spiegelt ein allgemeines Resultat wieder: Die Einheitszelle im Realraum ist bei (a) doppelt so groß wie bei (b), und entsprechend die 1. Brillouinzone halb so groß).



4. **Kraftstoß auf Oszillator.** Ein Oszillator ruht in seiner Gleichgewichtslage. Dann bekommt er einen Kraftstoß (2 Pkt.)

$$f(t) = \begin{cases} v_0/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Auslenkung $x(t)$. Diskutieren Sie die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \gg \frac{1}{\lambda}$, und skizzieren Sie hierfür die Lösungen

Lösung: Im Zeitintervall $0 \le t \le T$ lösen wir die inhomogene Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{v_0}{T}$$

Dies Gleichung hat die partikuläre Lösung $x_{part} = \frac{v_0}{T\omega_0^2}$. Mit der homogenen Lösung: $x_{hom}(t) = (A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t)\, e^{-\lambda t}$,wird die allgemeine Lösung $x = x_{hom} + x_{part}$ zu

$$x(t) = (A_1 \sin w_0 t + A_2 \cos w_0 t)\, e^{-\lambda t} + \frac{v_0}{T\omega_0^2} \qquad (0 \le t \le T)$$

Dabei ist $w_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Die Anfangsbedingungen lauten $x(0) = A_1 + v_0/(T\omega_0^2) = 0$ und $\dot{x}(0) = w_0 A_2 - \lambda A_1 = 0$. Damit erhalten wir

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0^2 T}\left(1 - \left[\cos w_0 t + \frac{\lambda}{w_0}\sin w_0 t\right] e^{-\lambda t}\right) \qquad (0 \le t \le T)$$

Diese Lösung beginnt mit einer waagerechten Tangente, schwingt über die neue Gleichgewichtslage bei $v_0/(\omega_0^2 T)$ hinaus und wird dann gedämpft. Für $t > T$ verschwindet die äußere Kraft:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (t > T)$$

Hierfür gilt die homogene Lösung

$$x(t) = (B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos(\omega_0 t))\, e^{-\lambda t}.$$

Mit der Kraft macht $\ddot{x}$ bei $t = T$ einen Sprung. Damit sind $\dot{x}(t)$ und $x(t)$ bei $t = T$ stetig. Diese beiden Bedingungen legen die Konstanten fest:

$$\begin{aligned} B_1 &= \tfrac{v_0}{\omega_0^2 T} \left(\left[\cos w_0 T - \tfrac{\lambda}{w_0} \sin w_0 T \right] e^{\lambda T} - 1 \right) \\ B_2 &= \tfrac{v_0}{\omega_0^2 T} \left(\left[\sin w_0 T + \tfrac{\lambda}{w_0} \cos w_0 T \right] e^{\lambda T} - \tfrac{\lambda}{w_0} \right) \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung für $t \geq T$ festgelegt:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{v_0}{w_0^2 T} \Bigg(&\left[\cos\left(w_0(t-T)\right) + \frac{\lambda}{w_0} \sin\left(w_0(t-T)\right) \right] e^{-\lambda(t-T)} \\ &- \left[\cos\left(w_0 t\right) + \frac{\lambda}{w_0} \sin\left(w_0 t\right) \right] e^{-\lambda t} \Bigg). \end{aligned}$$

Dies ist eine gedämpfte Schwingung, die für große Zeiten wieder in ihre ursprüngliche Ruhelage zurückkehrt. Für einen extrem kurzen Kraftstoß, $T \to 0$, geht das Zeitintervall $0 \leq t \leq T$gegen null, und die Lösung spielt keine Rolle in dem Bereich.

Die Lösung erhalten wir aus der Lösung für $t \geq T$; für $T \to 0$ erhalten wir dann:

$$x(t) = \frac{v_0}{w_0} \sin(w_0 t) e^{-\lambda t}$$

Während eines lang anhdauernden Kraftstoßes gilt zunächst die Lösung (**??**).

Nach dieser konvergiert die Auslenkung gegen die neue Gleichgewichtslage bei $\frac{v_0}{\omega_0^2 T}$.

Für $t > T$gilt (**??**), wobei der zweite Term wegen $T >> 1/\lambda$ wegfällt:

$$x(t) = \frac{v_0}{w_0^2 T} \left(\left[\cos\left(w_0(t-T)\right) + \frac{\lambda}{w_0} \sin\left(w_0(t-T)\right) \right] e^{-\lambda(t-T)} \right).$$

Dieser Teil der Lösung startet bei $t = T$ in der neuen Gleichgewichtslage mit einer waagerechten Tangente und wird dann rasch gedämpft; der Oszillator kehrt in seine ursprüngliche Ruhelage zurück.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **12 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 20. 1. 2009.