1. **Konstruktion einer kanonischen Transformation.** Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewegt sich auf der x-Achse im Potential $V(x) = \mathrm{e}^x$. Berechnen Sie die Erzeugende $F(x, P)$, die die Hamilton-Funktion (4 Pkt.)

$$H = p^2 + \mathrm{e}^x$$

auf die Gestalt

$$K = \frac{P^2}{4}$$

transformiert. Bestimmen Sie die Transformationsgleichungen und geben Sie $x(t)$ und $p(t)$ an.

2. **Garagen-Paradoxon.** Ein Mann trägt ein Brett (Eigenlänge $2L$) parallel zum Boden. Er läuft mit der konstanten Geschwindigkeit v auf eine Garage der Eigenlänge L zu. Die Garage habe vorne und hinten jeweils eine Tür. Die Türen sind so mit einander verbunden, dass immer eine offen und die andere geschlossen ist. Ein Beobachter im Ruhesystem der Garage schließt die vordere Tür genau in dem Moment, in dem sich das Ende des Brettes innerhalb der Garage befindet. Ist es möglich, dass die hintere Tür und das Brett dabei unbeschädigt bleiben? Betrachten Sie den Vorgang dazu zunächst im Ruhesystem der Garage. Wie stellt sich das Ereignis im Ruhesystem des Mannes dar? (4 Pkt.)

3. **Satz von Liouville mit Dämpfung.** Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Dämpfung, beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega^2 q = 0.$$

   (a) Führen Sie den zu q gehörigen Impuls p ein und skizzieren Sie für $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$ (verschiedene Fälle möglich!) Phasenraumtrajektorien. (2 Pkt.)

   (b) Drücken Sie für $\lambda = 0$ den Zustand des Systems $(q(t), p(t))^T$ durch die Anfangsdaten $(q_0, p_0)^T$ und eine zeitabhängige Matrix $\hat{M}(t)$ aus. (1 Pkt.)

   (c) Berechnen Sie $\det\big(\hat{M}(t)\big)$ und interpretieren Sie damit die Wirkung der Matrix. (1 Pkt.)

   (d) Was folgt damit für die zeitliche Entwicklung des Phasenraumvolumens $p_1 < p < p_2$ und $q_1 < q < q_2$? (1 Pkt.)

   (e) Wiederholen Sie die Rechnung für $\lambda \neq 0$. Wie lautet nun $\det\big(\hat{M}(t)\big)$? Interpretieren Sie auch hier die Wirkung der Matrix. Warum ist der Satz von Liouville hier nicht erfüllt? (2 Pkt.)

(insgesamt 7 Pkt.)

4. **Dipolpotential mit Hamilton-Jacobi.** Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Dipolpotential, das in Kugelkoordinaten durch (2 Pkt.)

$$V(r, \vartheta) = -\frac{k\cos\vartheta}{r^2}$$

gegeben ist. Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Differenzialgleichung für die Bewegung des Teilchens auf.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **17 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 27. 1. 2009.