1. **Konstruktion einer kanonischen Transformation.** Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewegt sich auf der x-Achse im Potential $V(x) = \mathrm{e}^x$. Berechnen Sie die Erzeugende $F(x, P)$, die die Hamilton-Funktion (4 Pkt.)

$$H = p^2 + \mathrm{e}^x$$

auf die Gestalt

$$K = \frac{P^2}{4}$$

transformiert. Bestimmen Sie die Transformationsgleichungen und geben Sie $x(t)$ und $p(t)$ an.

Lösung: Aus der Vorlesung entnehmen wir für Transformationen mit Erzeugenden des Typs $F_2(x, P, t)$:

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Da die hier gesuchte Funktion F aber nicht explizit von der Zeit abhängen soll gilt:

$$K = \frac{P^2}{4} = H = p^2 + \mathrm{e}^x \tag{1}$$

Die aus K folgenden kanonischen Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} P &= const. = 2\alpha \\ Q &= \frac{P}{2}t + Q_0 = \alpha t + Q_0 \end{aligned}$$

Anderseits folgt aus (1):

$$p(x, P) = \sqrt{\frac{P^2}{4} - \mathrm{e}^x}. \tag{3}$$

Laut Vorlesung gilt:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Eisetzen von (3) und einmal integrieren führt auf:

$$F(x, P) = \int \sqrt{\frac{P^2}{4} - \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x + g(P).$$

Wir substituieren $y = e^{\frac{x}{2}}$ und entnehmen die Lösung des sich ergebenden Integrals einer Integraltafel.

$$\begin{aligned}
F(x,P) &= \int \sqrt{\frac{P^2}{4} - y^2}\frac{dy}{y} + g(P) \\
&= 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - y^2} - P \ln\left(\frac{\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - y^2}}{y}\right) + g(P) \\
&= 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - e^x} - P \ln\left(\frac{P}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{P^2}{4}e^{-x} - 1}\right) + g(P) \\
&= 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - e^x} - P \operatorname{arcosh}\left(\frac{P}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) + g(P)
\end{aligned}$$

Laut Vorlesung gilt:

$$Q(x,P) = \frac{\partial F}{\partial P} = -\operatorname{arcosh}\left(\frac{P}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

Dabei haben wir $g(P) = 0$ gewählt. Prinzipiell ist jede Wahl von $g(P)$ möglich. Da dies aber nur Einfluss auf $Q(x,P)$ hat, können wir $g(P)$ sowählen, dass $Q(x,P)$ möglichst einfach wird. Mit (3) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
Q &= -\operatorname{arcosh}\sqrt{p^2 e^{-x} + 1} \\
P &= 2\sqrt{p^2 + e^x}
\end{aligned}$$

Die Umkehrung lautet:

$$\begin{aligned}
x &= 2\ln\frac{P}{2\cosh Q} \\
p &= \frac{P}{2}\tanh Q
\end{aligned}$$

Einsetzen von (2) liefert:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\ln\frac{\alpha}{\cosh(\alpha t + Q_0)} \\
p(t) &= \alpha \tanh(\alpha t + Q_0)
\end{aligned}$$

2. **Garagen-Paradoxon.** Ein Mann trägt ein Brett (Eigenlänge $2L$) parallel zum Boden. Er läuft mit der konstanten Geschwindigkeit v auf eine Garage der Eigenlänge L zu. Die Garage habe vorne und hinten jeweils eine Tür. Die Türen sind so mit einander verbunden, dass immer eine offen und die andere geschlossen ist. Ein Beobachter im Ruhesystem der Garage schließt die vordere Tür genau in dem Moment, in dem sich das Ende des Brettes innerhalb der Garage befindet. Ist es möglich, dass die hintere Tür und das Brett dabei unbeschädigt bleiben? Betrachten Sie den Vorgang dazu zunächst im Ruhesystem der Garage. Wie stellt sich das Ereignis im Ruhesystem des Mannes dar? (4 Pkt.)

Lösung: Wir betrachten das Geschehen zunächst im Bezugssystem der Garage. Wenn das Brett sich sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat es in diesem System die Länge

$$L' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, 2\, L\,.$$

In diesem System bleiben die hintere Tür und das Brett unbeschädigt, falls $L' < L$. Diese Bedingung liefert

$$v > \frac{\sqrt{3}}{2}\, c \approx 0{,}866\, c\,.$$

Das bedeutet, wenn der Mann mit ca. 86, 6% der Lichtgeschwindigkeit läuft, kommt er ohne Zwischenfall durch die Garage. Betrachten wir nun das Ganze aus dem System, dass sich mit dem Brett mitbewegt. In diesem System ist nicht das Brett selbst, sondern die Garage verkürzt. Trotzdem kann die physikalische Realität nicht von der Wahl des Inertialsystems abhängen. Deshalb wird das Brett auch in dem bewegten System durch die Garage passen. Der entscheidende Faktor den wir nicht vergessen dürfen ist die „Gleichzeitigkeit“ mit der die Tür vorne schließt und sich die hintere öffnet. Dies kann aber nur im Bezugssystem der Garage gleichzeigig sein, da die beiden Ereignisse nicht am selben Ort stattfinden. Ein kurzer Blick in das Minkowski- Diagramm verdeutlicht, dass im System des Mannes beide Türen gleichzeitig offen sind.

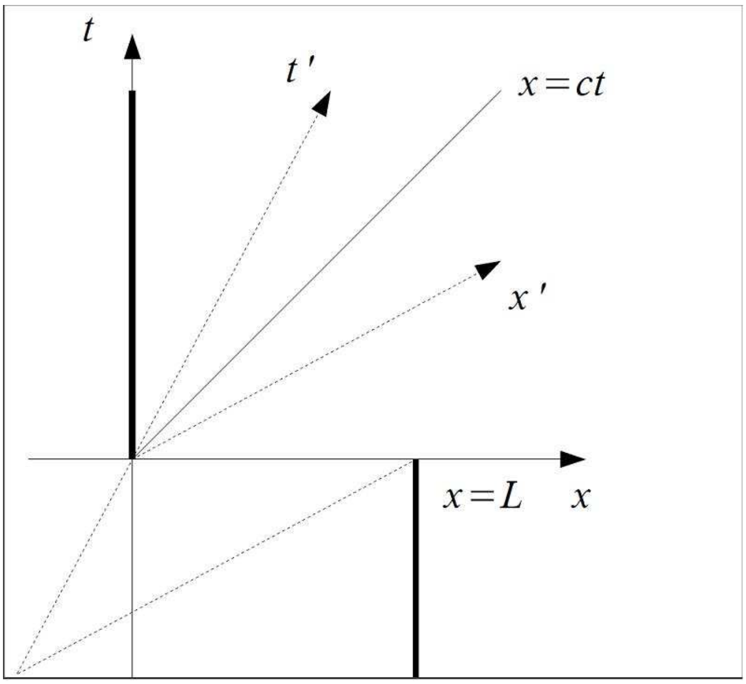


Abbildung 1: Minkowski- Diagramm mit beiden Koordinatensystemen

Im Diagramm sind auch die beiden Türen bei $x = 0$ und $x = L$ eingezeichnet. Als Zeitpunkt an dem die vordere Tür geschlossen und die hintere geöffnet werden, haben wir willkürlich Null angenommen. Zusätzlich haben wir eine Gerade eingezeichnet, die parallel zur x'- Achse verläuft und den Weltpunkt berührt, an dem die hintere Tür geöffnet wird. Ihr Schnittpunkt mit der t'- Achse repräsentiert den Zeitpunkt, an dem die hintere Tür im Bezugssystem des Mannes bereits offen ist. Mit Hilfe der Lorentz-Transformation können wir diese Zeit berechnen. Wir wählen dazu $x(0) = L$ und erhalten

$$t' = \beta \left(t - \frac{v\,x}{c^2} \right) = -\beta \frac{v\,L}{c^2} .$$

Da die beiden Diagramme einen gemeinsamen Nullpunkt haben, wird die vordere Tür auch bei $x' = 0$ und $t' = 0$ geschlossen. Um nun in diesem System eine Bedingung an die Geschwindigkeit zu erhalten, müssen wir eine Bedinung an das „Zeitfenster", in dem beide Türen offen sein, stellen. Es muss mindestens so groß sein, dass der Mann die Strecke $2L - \frac{L}{\beta}$ zurück legen kann. Diese Strecke ist genau das Stück des Brettes, das, wenn das eine Ende die hintere Tür berührt, vorne herausragt. Als Ungleichung lautet dies

$$\beta \frac{v^2\,L}{c^2} > 2L - \frac{L}{\beta} .$$

Auf der linken Seite steht also die Strecke, die der Mann innerhalb des Zeitfensters zurück legen kann, während auf der rechten Seite die Längendifferenz zwischen Brett und Garage in dem Bezugssystem stht. Lösen wir die Ungleichung auf, so erhalten wir wieder

$$v > \frac{\sqrt{3}}{2}\, c \approx 0{,}866\, c .$$

Wir sehen, dass es in beiden Bezugssystemen zu den gleichen Bedingungen kommt.

3. **Satz von Liouville mit Dämpfung.** Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Dämpfung, beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega^2 q = 0.$$

(a) Führen Sie den zu q gehörigen Impuls p ein und skizzieren Sie für $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$ (verschiedene Fälle möglich!) Phasenraumtrajektorien. (2 Pkt.)

(b) Drücken Sie für $\lambda = 0$ den Zustand des Systems $(q(t), p(t))^T$ durch die Anfangsdaten $(q_0, p_0)^T$ und eine zeitabhängige Matrix $\hat{M}(t)$ aus. (1 Pkt.)

(c) Berechnen Sie $\det\big(\hat{M}(t)\big)$ und interpretieren Sie damit die Wirkung der Matrix. (1 Pkt.)

(d) Was folgt damit für die zeitliche Entwicklung des Phasenraumvolumens $p_1 < p < p_2$ und $q_1 < q < q_2$? (1 Pkt.)

(e) Wiederholen Sie die Rechnung für $\lambda \neq 0$. Wie lautet nun $\det\big(\hat{M}(t)\big)$? Interpretieren Sie auch hier die Wirkung der Matrix. Warum ist der Satz von Liouville hier nicht erfüllt? (2 Pkt.)

(insgesamt **??** Pkt.)

Lösung:

(a) Der kanonische Impuls ist hier gleich dem kinematischen, also $p = m\dot{q}$. Für den gedämpften hamonischen Oszillator ist die Lösung $q(t)$ bekannt; damit können

Phasenraumtrajektoren gezeichnet werden. Dafür werden die folgenden Fälle unterschieden:

1. harmonischer Oszillator ohne Dämpfung, $\lambda = 0$; dann sind die Trajektorien im Phasenraum Ellipsen, und es gilt

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

2. gedämpfter harmonischer Oszillator im Schwingfall; dann ist

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\left(\cos(\hat{\omega} t) + B\sin(\hat{\omega} t)\right), \text{ mit } \hat{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Hier sind die Trajektorien nicht mehr geschlossen, sondern laufen spiralförmig um den Ursprung.

3. im Kriechfall; dann ist

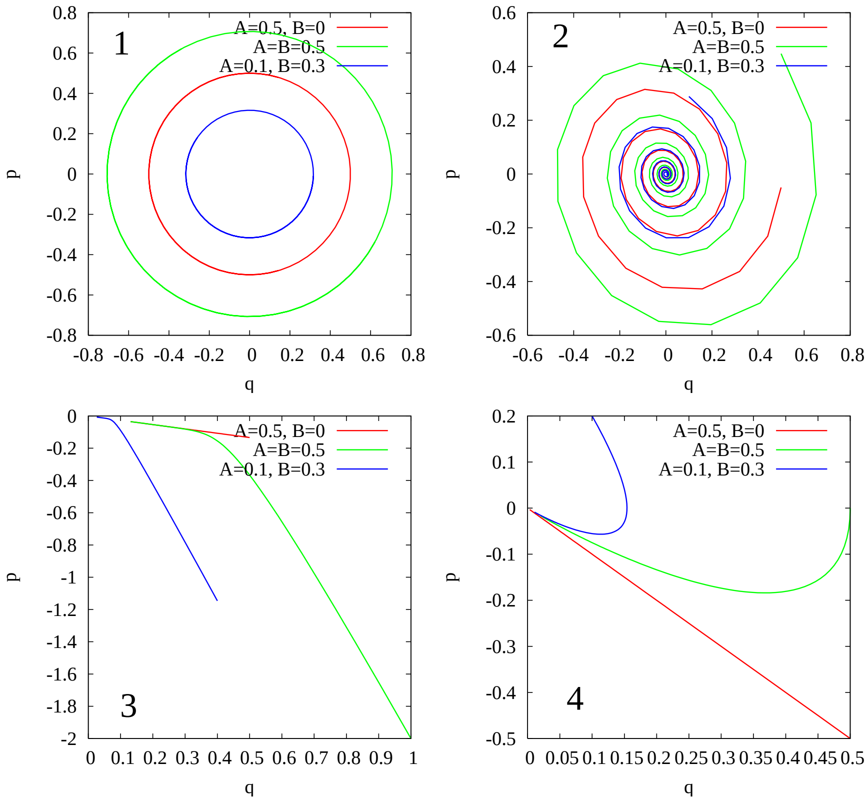
$$q(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}\right) \text{ mit } \gamma = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Hier laufen die Lösungen zum Ursprung, ohne ihn zu umlaufen.

4. im aperiodischen Grenzfall; hier ist

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t}.$$

Die verschiedenen Fälle sind in der Abbildung dargestellt.



(b) Wie wir bereits wissen, ist beim harmonischen Oszillator die Energie erhalten und entspricht auch der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{\lambda}{2}q^2\,.$$

Damit lauten die kanonischen Gleichungen in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} .$$

Um diese Gleichungen zu lösen, ist die Exponentialfunktion der Matrix zu nehmen, dann ist

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\,\omega} \sin(\omega t) \\ -m\,\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} .$$

(c) Die Determinante berechnet sich einfach zu

$$\det\left(\hat{M}(t)\right) = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 .$$

Da die Determinante zeitunabhängig ist, ist die Matrix $\hat{M}(t)$ für alle Zeiten eine speziell orthogonale Matrix. Damit handelt es sich um eine Rotation des Zustandes im Phasenraum, die den Abstand zum Koordinatenursprung nicht ändert. Da die Matrix auch nicht von den Anfangsdaten abhängig ist, rotiert jeder Zustand mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit im Phasenraum.

(d) Da jeder Punkt des Phasenraums in der zeitlichen Entwicklung mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω um den Koordinatenursprung rotiert, ändert sich das Phasenraumvolumen beim harmonischen Oszillator nicht, da es ebenfalls nur um den Koordinatenursprung rotiert.

(e) Wieder können wir die Bewegungsgleichungen in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ \omega^2 m & 2\lambda \end{pmatrix} .$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$\det\hat{M}(t) = e^{-2\lambda t} \neq 1,$$

das Phasenraumvolumen nimmt also ab, statt konstant zu bleiben. Der Satz von Liouville ist hier nicht erfüllt, da kein hamiltonsches System vorliegt: Durch die Dämpfung ist das System nicht mehr konservativ.

4. **Dipolpotential mit Hamilton-Jacobi.** Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Dipolpotential, das in Kugelkoordinaten durch (2 Pkt.)

$$V(r,\vartheta) = -\frac{k\cos\vartheta}{r^2}$$

gegeben ist. Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Differenzialgleichung für die Bewegung des Teilchens auf.

Lösung: Die Hamilton-Funktion ist mit

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

durch

$$H = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k\cos\vartheta}{r^2}$$

gegeben, die Lagrangefunktion durch

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k\cos\vartheta}{r^2}.$$

Die kanonischen Impulse zu r, ϑ, φ sind

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\\
p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta},\\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=r,\vartheta,\varphi} p_i\dot{q}_i - L\\
&= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) - \frac{k\cos\vartheta}{r^2}.
\end{aligned}$$

Als Funktion der Wirkungsvariablen S gilt

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad i = r,\,\vartheta,\,\varphi,$$

also lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{k\cos\vartheta}{r^2} = 0.$$

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **?? Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 27. 1. 2009.