24 Minkowskis vierdimensionale Raumzeit

Der deutsche Mathematiker Hermann Minkowski (1864–1909) erkannte, daß sich die von Albert Einstein 1905 entwickelte spezielle Relativitätstheorie am elegantesten in einem vierdimensionalen, nichteuklidischen Vektorraum formulieren läßt, dem sogenannten *Minkowski-Raum*. Diese Darstellung half Einstein später bei der Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie. Auch uns wird der Formalismus helfen, allerdings bei der vergleichsweise einfachen Aufgabe, die Lorentz-invarianten Gesetze der Mechanik für Inertialsysteme zu formulieren.

24.1 Abstand und Invarianz

Die Lorentz-Transformation (23.5) verknüpft die drei Ortskoordinaten und die Zeit miteinander. Sie wird als abstrakte Transformation also in einem vierdimensionalen Raum operieren. Lorentz-invariante Gleichungen werden deshalb vorzugsweise in einem vierdimensionalen Raum formuliert, der die drei Ortskoordinaten und eine Zeitkoordinate enthält. Die Zeit multiplizieren wir dabei mit der universellen Grenzgeschwindigkeit c, um sie ebenfalls in Einheiten der Länge messen zu können. Die so entstandenen vierdimensionalen Vektoren nennt man *Weltpunkte*:

$$(ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})\,. \tag{24.1}$$

Da die Geschwindigkeit c invariant ist unter Lorentz-Transformationen, ist die Umskalierung der Zeit t in eine äquivalente Länge ct kein Problem. Mit dieser Umskalierung wird die Lorentz-Transformation sehr symmetrisch. So wird aus (2.8)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta\, ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta\, x) \end{aligned} \tag{24.2}$$

Ein Weltpunkt beschreibt die Koordinaten eines *Ereignisses* in der Raumzeit. Ein Punktteilchen, daß sich zu jedem Zeitpunkt t an einem Ort $\mathbf{r}(t)$ befindet, wird durch eine *Weltlinie* in diesem Raum beschrieben. Der Ortsanteil $\mathbf{r}$ der Weltlinie ist natürlich nichts anderes als die Trajektorie des Teilchens. Die geradlinig gleichförmige Bewegung entspricht einer Geraden in der Raumzeit. Beschleunigte Bewegungen entsprechen dagegen gekrümmten Weltlinien, wobei es egal ist, ob sich die Richtung der Geschwindigkeit oder nur deren Betrag ändert.

Wir statten unseren Raum mit einer *Metrik* aus. Dazu definieren wir das Quadrat Δs^2 des Abstandes zweier Ereignisse $(ct_1, \mathbf{r}_1)$ und $(ct_2, \mathbf{r}_2)$ als

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - y_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \end{aligned} \tag{24.3}$$

Die Metrik ist etwas gewöhnungsbedürftig, denn Δs^2 kann negativ sein, z.B. für Ereignisse, die zur gleichen Zeit an verschiedenen Orten stattfinden. Die Bedeutung dieser Metrik erschließt sich daraus, daß sie invariant ist unter Lorentz-Transformationen: der Abstand zweier Ereignisse ist für alle inertialen Beobachter gleich,

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2\,. \tag{24.4}$$

Das gilt für die Transformation (23.5) ebenso wir für die allgemeine Lorentz-Transformation, d.h. für (23.5) plus einer räumlichen Drehung und einer raumzeitlichen Verschiebung. Der vierdimensionale reelle Vektorraum mit der Metrik (24.3) heißt *Minkowski-Raum.*

Eine wesentliche Eigenschaft der Lorentz-Transformation war die Tatsache, daß sich das Licht in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit c in alle Richtungen ausbreitet. Die Front eines Lichtblitzes, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung von S ausgelöst wird, beschreibt eine Kugel im Raum mit Radius ct,

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Dieselbe Gleichung gilt aber auch im System S',

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\,.$$

Für beide Beobachter hat das Lichtsignal den Abstand $\Delta s^2 = 0$ bzw. $\Delta s'^2 = 0$ zum Koordinatenursprung. Die Invarianz (24.4) gilt aber auch für von Null verschiedene Abstände, wovon man sich durch Nachrechnen mit (23.5) leicht überzeugen kann.

In den meisten Lehrbüchern wird die Lorentz-Transformation aus zwei Postulaten hergeleitet: dem Relativitätsprinzip und der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit. Bei diesen Herleitungen wird also (24.4) postuliert und daraus die Transformation (23.5) hergeleitet. Wir demonstrieren diese Vorgehensweise an Hand der Zeitdilatation. Die differentielle Form des Abstandes ist

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\,. \tag{24.5}$$

Eine im System S' ruhende Uhr zeige das Zeitintervall $\mathrm{d}\tau$ (Eigenzeit) an, etwa durch zwei aufeinanderfolgende Positionen ihres Sekundenzeigers. Im System S entspricht dies dem raumzeitlichen Abstand

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}t^2\left(c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2\right) \\ &= c^2\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \overset{(24.5)}{=} \mathrm{d}s'^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2\,, \end{aligned}$$

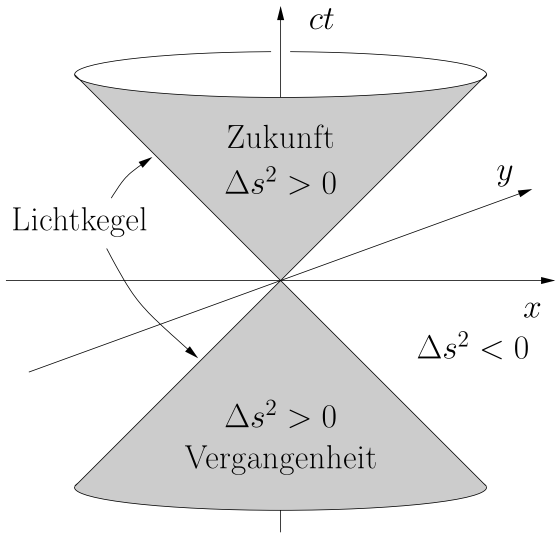

Abb. 24.1: Minkowski-Raum mit Lichtkegel.

und daraus folgt sofort die Zeitdilatation

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau\,.$$

An dieser Stelle sei aber nocheinmal daran erinnert, daß man die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht postulieren muß und die Lorentz-Transformation allein aus dem Relativitätsprinzip herleiten kann, wie wir das in der 2. Vorlesung gemacht haben.

Die Invarianz der raumzeitlichen Metrik Δs^2 macht diese zu einer wichtigen Größe in der speziellen Relativitätstheorie. Dabei unterscheidet man Ereignisse insbesondere nach dem Vorzeichen von Δs^2. Der Abstand zwischen zwei Ereignissen heißt

- *zeitartig* für $\Delta s^2 > 0$,
- *raumartig* für $\Delta s^2 < 0$ und
- *lichtarig* für $\Delta s^2 = 0$.

Für zwei zeitartig getrennte Ereignisse gibt es immer ein Inertialssystem, in dem beide Ereignisse am selben Ort stattfinden, aber niemals ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Das sieht man so: für $\Delta s^2 > 0$ muß immer $\Delta t^2 > 0$ sein und ausserdem

$$c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta \mathbf{r}^2\,.$$

Für einen Beobachter, der sich mit $v = |\Delta \mathbf{r}|/\Delta t < c$ vom ersten zum zweiten Ereignis bewegt, finden beide Ereignisse am gleichen Ort statt.

Bei zwei raumartig getrennten Ereignisse kann man dagegen immer ein Inertialsystem finden, in dem beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden, jedoch niemals ein Inertialsystem, in dem beide am selben Ort stattfinden.

Üblicherweise wählt man den Ursprung des Koordinatensystems in der Raumzeit so, daß er mit einem der beiden Ereignisse zusammenfällt. Dann zerfällt die Raumzeit in zwei Bereiche (Abb. 24.1). Ein Bereich enthält alle Vektoren mit zeitartigem Abstand zum Ursprung, der andere Bereich die Vektoren mit raumartigem Abstand. Getrennt werden beide Bereiche durch den *Lichtkegel*, d.h. durch alle Vektoren mit Abstand $\Delta s^2 = 0$.

Da zwei Ereignisse nur dann in einem kausalen Zusammenhang stehen können, wenn sie durch Signale mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit $\leq c$ miteinander verbunden sind, liegen kausale Vergangenheit und Zukunft eines Ereignisses in dessen Lichtkegel. Man überzeugt sich leicht davon, daß für zwei Ereignisse mit zeitartigem Abstand die *zeitliche Reihenfolge* eine Invariante ist, d.h. es gilt

$$\mathrm{sgn}(t_1 - t_2) = \mathrm{sgn}(t'_1 - t'_2)\,.$$

Für raumartig getrennte Ereignisse hängt die Reihenfolge dagegen vom Beobachter ab!

24.2 Minkowski-Formalismus

Wir bezeichnen die Komponenten der Weltpunkte im Minkowski-Raum durch hochgestellte Indizes,

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)\,. \tag{24.6}$$

Beim Rechnen in dieser Darstellung erweisen sich zwei Konventionen als sehr nützlich:

- Indexkonvention: griechische Indizes $(\mu, \nu, \ldots)$ laufen von 0 bis 3, lateinisches Indizes $(i, j, \ldots)$ von 1 bis 3
- Summenkonvention: Über doppelte Indizes eines Terms wird summiert.

Mit diesen Konventionen können wir (24.5) schreiben als

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu x^\nu \tag{24.7}$$

mit dem *metrischen Tensor*

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24.8}$$

Die Lorentz-Transformation (2.8) läßt sich mit Hilfe der Vierervektoren schreiben als

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{24.9}$$

was wir Dank unserer Konventionen auch kompakter schreiben können:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu\,. \tag{24.10}$$

Die allgemeine Lorentztransformation (23.5) ohne räumliche Drehung wird durch die symmetrische Matrix

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & & & \\ -\gamma\beta_x & & \delta_{ij} + (\gamma-1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} & \\ -\gamma\beta_z & & & \end{pmatrix} \tag{24.11}$$

repräsentiert mit $\beta = v/c$, $\beta_x = v_x/c$ etc.. Die ungewöhnliche Anordnung der Indizes bei $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ dient der Unterscheidung zwischen der Transformation (24.10) und ihrer Umkehrung,

$$x^{\mu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu}\, x^{\nu\prime}\,. \tag{24.12}$$

Dabei geht $\Lambda_{\nu}{}^{\mu}$ aus $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ einfach durch die Ersetzung $v \mapsto -v$ hervor. So gilt für die Umkehrung der speziellen Lorentz-Transformation (24.9)

$$\Lambda_{\nu}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24.13}$$

Allgemein gilt natürlich per Definitionem

$$\Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\,\Lambda_{\nu}{}^{\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad \text{und} \qquad \Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\,\Lambda_{\lambda}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}\,, \tag{24.14}$$

wobei das Kronecker-Delta δ^{μ}_{ν} die Einträge der Einheitsmatrix beschreibt.

Das Inverse des metrischen Tensors bezeichnen wir mit $g^{\mu\mu}$:

$$g^{\mu\lambda}\, g_{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{24.15}$$

Wegen „$g^2 = 1$“ (genauer: $g_{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$) folgt sofort, daß $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ identisch sein müssen:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g_{\mu\nu})\,. \tag{24.16}$$

Durch direktes Ausrechnen findet man außerdem

$$\Lambda_{\kappa}{}^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda_{\lambda}{}^{\nu} = g_{\kappa\lambda} \qquad \text{und} \qquad \Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\, g^{\mu\nu}\, \Lambda^{\lambda}{}_{\nu} = g^{\kappa\lambda}\,. \tag{24.17}$$

Das sind die *Orthogonalitätsrelationen* für die Lorentz-Transformation in Minkowski-Darstellung, vergleichbar mit der Gleichung für orthogonale Matrizen in euklidischen Vektorräumen, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 1$. Aus diesen Orthogonalitätsrelationen folgt sofort folgender Zusammenhang zwischen der Lorentz-Transformation und ihrer Inversen:

$$\Lambda_{\nu}{}^{\mu} = g_{\nu\kappa}\, g^{\mu\lambda}\Lambda^{\kappa}{}_{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\kappa}\, g_{\kappa\lambda}\Lambda_{\kappa}{}^{\lambda} \tag{24.18}$$

24.3 Vierervektoren

Der Sinn dieses etwas barocken Formalismus liegt in der einfachen Konstruktion von Größen, mit denen sich Gleichungen formulieren lassen, die „automatisch“ Lorentz-invariant sind. Erstes Beispiel einer solchen Größe sind *Vierervektoren*.

Definition 24.1 *Eine in den Koordinatensystemen S und S' definierte, vierkomponentige Größe* (a^0, a^1, a^2, a^3) *bzw.* $(a^{0\prime}, a^{1\prime}, a^{2\prime}, a^{3\prime})$ *heißt* kontravarianter Vierervektor*, wenn sie sich bei Lorentz-Transformation wie der Vektor* (x^μ) *transformiert, d.h., wenn gilt*

$$a^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \, a^\nu \, . \tag{24.19}$$

Nach dieser Definition sind die Vektoren (24.6) der Weltpunkte natürlich selbst kontravariante Vektoren. Wir betrachten nun eine bezüglich der Lorentz-Transformation skalare Funktion $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, also eine Funktion mit $\varphi'(x^{\mu\prime}) = \varphi(x^\mu)$. Für deren Ableitung gilt

$$\frac{\partial \varphi'(x^{\mu\prime})}{\partial x^{\lambda\prime}} = \frac{\partial \varphi(x^\mu)}{\partial x^{\lambda\prime}} = \frac{\partial \varphi(x^\mu)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda\prime}} = \Lambda_\lambda{}^\nu \frac{\partial \varphi(x^\mu)}{\partial x^\nu} \, .$$

Die vierkomponentige Größe $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}$ transformiert sich beim Übergang von S nach S' also nicht mit der Lorentz-Transformation, sondern mit deren Inversen. Diese Eigenschaft heißt *kovariant* und wird mit niedriggestellten Indizes gekennzeichnet:

Definition 24.2 *Eine in den Koordinatensystemen S und S' definierte, vierkomponentige Größe* (b_0, b_1, b_2, b_3) *bzw.* $(b_0{}', b_1{}', b_2{}', b_3{}')$ *heißt* kovarianter Vierervektor*, wenn sie sich bei Lorentz-Transformation transformiert gemäß*

$$b_\mu{}' = \Lambda_\mu{}^\nu \, b_\nu \, . \tag{24.20}$$

Aus einem ko- und einem kontravarianten Vektor kann man durch Multiplikation einen *Lorentz-Skalar* bilden, d.h. eine einkomponentige Größe, die invariant ist unter Lorentz-Transformationen:

$$a^{\mu\prime} \, b'_\mu = \Lambda^\mu{}_\kappa \, a^\kappa \, \Lambda_\mu{}^\lambda \, b_\lambda = \delta^\lambda_\kappa \, a^\kappa b_\lambda = a^\lambda b_\lambda \, .$$

Wichtiges Beispiel für einen Lorentz-Skalar: die Änderung $\mathrm{d}\varphi$ einer skalaren Funktion beim Übergang $x^\mu \mapsto x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$, die als Differenz zweier Skalare wieder einen Skalar ergibt:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \, \mathrm{d}x^\mu \, .$$

Generell gilt natürlich, daß Linearkombinationen kovarianter (kontravarianter) Vektoren wieder kovariant (kontravariant) sind.

Satz 24.1 *Ist $a^\mu \, b_\mu$ für einen beliebigen Vierervektor (a^μ) ein Lorentz-Skalar, dann ist (b_μ) ein kovarianter Vierervektor. Ist $a^\mu \, b_\mu$ für einen beliebigen Vierervektor (b_μ) ein Lorentz-Skalar, dann ist (a^μ) ein kontravarianter Vierervektor.*

Beweis: Sei (a^μ) ein Vierervektor. Dann gilt

$$a^{\mu\prime}\, b'_\mu = \Lambda^\mu{}_\kappa a^\kappa\, b'_\mu \stackrel{\star}{=} a^\mu \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa \stackrel{!}{=} a^\mu\, b_\mu\,.$$

Dabei haben wir bei Gleichung $\star$ einfach die Summationsindizes κ und μ vertauscht. Da (a^μ) aber beliebig ist, folgt aus der letzten Gleichung $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Multiplikation dieser Gleichung mit $\Lambda_\lambda{}^\mu$ ergibt

$$\Lambda_\lambda{}^\mu b_\mu = \Lambda_\lambda{}^\mu \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa = \delta^\kappa_\lambda b'_\kappa = b'_\lambda\,,$$

d.g. (b_μ) ist kovariant. Der Beweis des zweiten Teiles geht analog.

Mann kann mit Hilfe des metrischen Tensors auch aus zwei kovarianten oder zwei kontravarianten Vektoren einen Lorentz-Skalar bilden, nämlich das *Skalarprodukt*

$$g_{\mu\nu}\, a^\mu\, b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu\, b_\nu\,. \tag{24.21}$$

Diese Identität und die skalare Natur folgen leicht aus (24.17). Aus dem Skalarprodukt und Satz 24.1 folgen einfache Vorschriften, mit denen man aus einem kovarianten einen kontravarianten Vektor machen kann (und umgekehrt):

$$a_\mu = g_{\mu\nu}\, a^\nu \qquad a^\mu = g^{\mu\nu}\, a_\nu \tag{24.22}$$

Das wichtigste Beispiel für das Skalarprodunkt ist das Wegelement $\mathrm{d}s^2$ (24.7). Aus der Tatsache, daß $\mathrm{d}s^2$ ein Skalar ist sowie aus

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu \\ &= c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \mathrm{d}\tau^2 \end{aligned} \tag{24.23}$$

folgt, daß auch die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau$ ein Lorentz-Skalar ist. Analog ist auch die Eigenlänge (Ruhlänge) ein Lorentz-Skalar.

Die Lorentz-Transformationen lassen die „Länge“ von Vierervektoren $(a^\mu\, g_{\mu\nu}\, a^\nu)$ invariant, d.h., sie verhalten sich analog zu den Drehungen im vertrauten Euklidischen Raum. Man kann die Effekte der speziellen Relativitätstheorie sehr einfach mit Hilfe dieser Drehungen interpretieren. Nehmen wir als Beispiel das Quadrat des Abstandes zweier Ereignisse,

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\,.$$

Dieser raumzeitliche Abstand ist für alle inertialen Beobachter identisch. Durch die gegeneinander gedrehten Koordinatensysteme projizieren verschiedene Beobachter diese Länge aber in unterschiedliche Weise auf die Koordinaten. Jeder Beobachter macht Längenmessung an zwei Ereignissen, die für ihn gleichzeitig sind, d.h. für $\Delta t = 0$.

Er ignoriert bei Längenmessungen also den Teil des raumzeitlichen Abstandes, der in der Zeitkoordinate steckt und mißt nur den Teil in den räumlichen Koordinaten. So kommen zwei zueinander bewegte Beobachter zu unterschiedlichen Längenmessungen. Bei der Zeitmessung mit einer Uhr wird analog der Anteil der räumlichen Koordinaten ignoriert. Damit ist auch klar warum bewegte Uhren langsamer und bewegte bewegte Masstäbe kürzer erscheinen, Zeit und Länge also reziprok zueinander verändert werden.

24.4 Kontrollfragen

1. Was versteht man unter dem Minkowski-Raum?
2. Wie ist der Abstand zweier Ereignisse im Minkowski-Raum definiert?
3. Was bedeutet es, wenn zwei Ereignisse raumartigen, zeitartigen oder lichtartigen Abstand voneinander haben?
4. Was ist ein kovarianter Vierervektor? Beispiel?
5. Was ist ein kontravarianter Vierervektor? Beispiel?
6. Was ist ein Lorentz-Skalar? Beispiel?
7. Was haben Zeitdilatation und Längenkontraktion mit Drehungen im Minkowski-Raum zu tun?