2 Das Relativitätsprinzip und seine Folgen

Kein Mensch wundert sich dabei darüber, daß man von einer Bewegung nichts bemerkt, auch dann nicht, wenn sie mit hoher Geschwindigkeit erfolgt. Wir schlendern gemütlich durch den Zug, der mit 300 km/h durch die Landschaft fährt oder balancieren ohne große Probleme eine volle Tasse Kaffee in einem Flugzeug, das mit 800 km/h durch die Luft fliegt. Allerdings reagieren wir sehr wohl auf *Änderungen* des Bewegungszustandes: gerät das Flugzeug in Turbulenzen, landet der Kaffee womöglich auf der Hose, und auch Start und Landung spüren wir deutlich an den damit verbundenen Kräften. Geradlinig gleichförmige Bewegungen bleiben dagegen unbemerkt, und das bleibt auch so, wenn man statt unserer Sinne physikalische Experimente heranzieht: das Ergebnis eines Experimentes ist unabhängig davon, ob sich der Experimentator mit seinem Labor geradlinig gleichförmig bewegt oder nicht. Das war schon Galileo Galilei aufgefallen. Wenn man diese Erfahrungstatsache aber konsequent zu Ende denkt, kommt man zu überraschenden Erkenntnissen über die Struktur von Raum und Zeit. Dazu gehören z.B. die Existenz einer universellen, absoluten Grenze für Geschwindigkeiten und die Tatsache, das bewegte Uhren langsamer gehen. Verknüpft man diese Eigenschaften von Raum und Zeit mit der Mechanik, so erhält man u.a. die wohl berühmteste Gleichung der Physik, $E = mc^2$.

Das alles werden wir im Laufe der Vorlesungen noch ausführlich diskutieren. In dieser Vorlesung geht es zunächst um die grundlegende Struktur von Raum und Zeit, wie sie aus der vergleichenden Sicht zweier gegeneinander bewegten Beobachter folgt.

2.1 Inertialsysteme

Die Beschreibung einer Bewegung erfolgt immer relativ zu einem Bezugssystem. Aber welches Bezugssystem nehmen wir? Die Wahl der Bezugssystems hat entscheidenden Einfluß auf die Art der beobachteten Bewegung. Wählen wir zur Beschreibung der Bewegung eines Punktteilchens das begleitende Dreibein aus der letzten Vorlesung, so ist die Bewegung sehr simpel: in diesem Koordinatensystem ruht das Teilchen immer im Ursprung. So gesehen können wir jede noch so komplizierte Bewegung eines Teilchens immer „wegtransformieren“. Das ist natürlich wenig sinnvoll, aber die Frage nach einem geeigneten Bezugssystem bleibt.

Wie so oft in der Physik wird die Wahl durch die Einfachheit der daraus resultierenden Gesetze bestimmt. Was ist die einfachste Situation, die man sich vorstellen kann? Ein Punktteilchen, daß keinerlei Einflüssen („Kräften“) ausgesetzt ist. Wir erwarten, daß ein solches Teilchen in Ruhe ist, oder nach dem was wir gerade festgestellt haben, sich geradlinig gleichförmig bewegt. Solche Bezugssysteme nennen wir *Inertialsysteme*:

> Ein Bezugssystem, in dem ein kräftefreies Teilchen ruht oder sich geradling gleichförmig bewegt, heißt Inertialsystem.

Ist ein System wie unser Hörsaal, das mit der Erde fest verbunden ist, ein Inertialsystem? Kräftefreiheit können wir nur dadurch herstellen, daß wir die allgegenwärtige Gravitationskraft der Erde kompensieren, beispielsweise durch die Fadenspannung beim Fadenpendel oder die Auflagekraft auf einer Tischfläche. Ein reibungsfrei gelagerte Puck auf einer ebenen Fläche ist dann tatsächlich in Ruhe oder bewegt sich geradling gleichförmig. Wenn man aber sehr genau beobachtet, stellt man Abweichungen fest, die hauptsächlich von der Rotation der Erde um ihre eigene Achse verursacht werden. Diese Effekte sind im allgemeinen klein, können aber bei geeigneter experimenteller Anordung deutlich sichtbar werden. Paradebeispiel dafür ist das Foucault'sche Pendel (5. Vorlesung). Ein Koordinatensystem, daß mit der Erde fest verbunden ist, ist deshalb nur näherungsweise und unter Ausgleich der Gravitation ein Inertialsystem. Ein besseres (aber auch nicht perfektes) Inertialsystem erhält man, wenn man nicht die Erde, sondern die Sonne als Bezugspunkt nimmt. Da sich auch die Sonne auf einer gekrümmten Bahn um das Zentrum unserer Galaxis bewegt, ist ein System, in dem dieses Zentrum ruht, ein noch besseres Inertialsystem. Man erkennt, daß es Inertialsysteme in der Realität nur in Näherungen gibt. Der Begriff des Inertialsystems ist eine Idealisierung, allerdings eine sehr tragfähige und nützliche.

2.2 Das Relativitätsprinzip

Im Alltag stellen wir uns die Frage nach dem geeigneten Bezugssystem relativ selten; zu sehr sind wir daran gewöhnt, die Erde als festes Bezugssystem zu wählen. Sobald wir uns in einem geschlossenen Raum befinden, nehmen wir jedoch die Wände dieses Raumes als Bezugssystem—und das machen wir auch dann noch, wenn dieser Raum sich gegenüber der Erdoberfläche mit hoher Geschwindigkeit bewegt, etwa in einem Zug oder in einem Flugzeug. Die Erfahrung lehrt uns schließlich, daß eine geradlinig gleichförmige Geschwindigkeit die mechanischen Gesetze nicht beeinflußt. Diese Erkenntins wurde schon 1632 von Galileo Galilei in seinem *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme* formuliert:

Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einem möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; ... hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites, enghalsiges darunter gestelltes Gefäß träufeln läßt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, ... die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, daß es sich um gleiche

Entfernungen handelt. …Nun laßt das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet—wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend—bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht.

Galilei hat die Erkenntnis, daß physikalische Gesetzmäßigkeiten nicht von einer geradling gleichförmigen Bewegung beeinflußt werden, nur auf mechanische Gesetze bezogen. Heute denken wir, daß das für alle physikalische Gesetze gilt und damit eine wesentliche Eigenschaft von Raum und Zeit darstellt. Das *Relativitätsprinzip* ist eines der Grundpfeiler der Physik:

> **Relativitätsprinzip**: Alle Inertialsysteme sind gleichwertig, d.h., physikalische Gesetze zeichnen kein Inertialsystem gegenüber anderen Inertialsystemen aus.

Insbesondere schließt das Relativitätsprinzip die physikalische Erfassung eines absolut ruhenden Bezugssystems („Mittelpunkt der Welt“) aus.

2.3 Transformationen zwischen Inertialsystemen

Das Relatvitätsprinzip sagt nicht, daß für Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen ein und dasselbe Experiment auch gleich erscheint. So fällt z.B. die Beschreibung einer Kugel, die vom Mast eines Schiffes herabfällt, unterschiedlich aus, je nach dem, ob der Beobachter auf dem Schiff mitfährt (vertikale Bahnkurve) oder aber auf der Kaimauer stehend das Schiff vorüberziehen sieht (Parabel). Aus dem Relativitätsprinzip (und einigen weiteren Grundannahmen über Raum und Zeit) folgt aber, wie die Koordinaten eines Ereignisses von einem Inertialsystem in ein anderes *umgerechnet* werden müssen. Diese Transformation der Koordinaten von Ort und Zeit wollen wir bestimmen.

Im folgenden Betrachten wir zwei Inertialsysteme S und S'. Aus der Homogenität von Raum und Zeit folgt zunächst, daß die Transformation zwischen S und S' linear sein muß. Homogenität bedeutet ja, daß der Koordinatenursprung in Raum und Zeit beliebig gewählt werden kann. Die Koordinaten selbst sind aber eine lineare Funktion des Ursprungs, also muß die Transformation selbst linear sein. Damit bleibt eine geradlinig gleichförmige Bewegung in S auch für einen Beobachter in S' geradlinig und gleichförmig, so wie es vom Relativitätsprinzip gefordert wird (kräftefreie Bewegung).

Eine lineare Funktion f von $\xi = (x, y, z, t)$ nach $\xi' = (x', y', z', t')$ kann allgemein geschrieben werden als

$$f(\xi) = \mathbf{A}\xi + \xi_0\,,$$

wobei $\mathbf{A}$ eine 4×4-Matrix ist. Zusammen mit ξ_0 ergibt das 20 Konstanten, von denen die Transformation abhängen kann. Um die Bestimmung von f zu vereinfachen, betrachten wir zunächst eine spezielle Transformation (Abb. 2.1) bei der die Koordinatenursprünge beider Systeme zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen und S' sich mit Geschwindigkeit v entlang der positiven x-Achse bewegt. Der Punkt $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$ hat in S die Koordinaten $(x = vt, y = 0, z = 0)$. Außerdem wollen wir die Uhr in S' in dem Moment auf Null

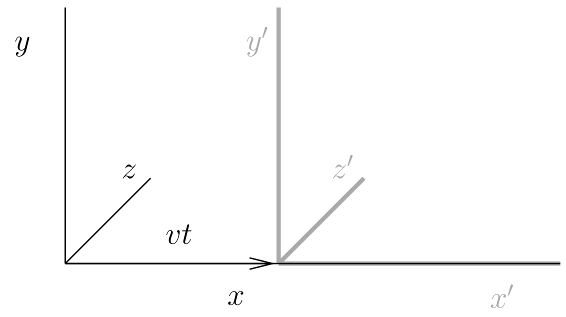

Abb. 2.1: Spezielle Transformation $S \overset{v}{\mapsto} S'$.

stellen, in dem die Koordinatenursprünge zusammenfallen. Damit ist die Transformation homogen ($\xi_0 = 0$). Ausserdem sollte ein Eriegnis, welches in S in der x-z-Ebene stattfindet, auch in S' in der x'-z'-Ebene liegen, d.h., aus $y = 0$ sollte $y' = 0$ folgen, und gleiches sollte für die z-Koordinate gelten. Mit diesen Einschränkungen muß die Transformation von der Form

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)\,(x - vt) \\ y' &= \alpha(v)\,y \\ z' &= \alpha(v)\,z \\ t' &= \mu(v)\,t + \varepsilon(v)\,x \end{aligned} \tag{2.1}$$

sein, wobei die darin vorkommenden Koeffizienten noch von der Geschwindigkeit v abhängen. Wegen der Isotropie des Raumes transformieren sich die beiden Richtungen senkrecht zur Bewegungsrichtung mit dem gleichen Koeffizienten $\alpha(v)$. Die Isotropie ist auch der Grund dafür, daß t' weder von y noch von z abhängen darf. Wäre das nicht der Fall, würden Uhren, die symmetrisch zur x-Achse angeordnet sind (etwa bei $-y$ und $+y$) unterschiedliche Zeiten anzeigen und damit die Isotropie verletzen.

Wenn wir beide Koordinatensysteme S und S' um 180 Grad um ihre jeweilige z-Achse drehen ($x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ und $x' \mapsto -x'$ und $y' \mapsto -y'$) und gleichzeitig v durch $-v$ ersetzen, so haben wir dieselbe Situation wie oben, nur eben vom gedrehten Koordinatensystemen aus gesehen. Auf Grund der Isotropie des Raumes muß unsere Transformation invariant sein unter dieser Drehung, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} -x' &= \gamma(-v)\,(-x + vt) \\ -y' &= -\alpha(-v)\,y \\ z' &= \alpha(v)\,z \\ t' &= \mu(v)\,t - \varepsilon(v)\,x\,. \end{aligned}$$

Vergleich mit (2.1) liefert

$$\gamma(-v) = \gamma(v) \qquad \alpha(-v) = \alpha(v) \qquad \mu(-v) = \mu(v) \qquad \varepsilon(-v) = -\varepsilon(v)\,,$$

d.h., α, γ und μ sind gerade und ε ist eine ungerade Funktion von v. Um nur noch mit geraden Koeffizienten zu rechnen, ersetzen wir ε durch

$$\varepsilon(v) = -v\frac{\mu(v)}{\eta(v)}\,.$$

Der neue Koeffizient $\eta(v)$ ist eine gerade Funktion von v.

Laut Relativitätsprinzip sind die Systeme S und S' völlig gleichberechtigt. Deshalb müssen die Transformationsgleichungen von S nach S' dieselbe Struktur haben wie die Gleichungen der inversen Transformation $S' \mapsto S$. Da S sich von S' aus betrachtet mit $-v$ bewegt erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)\,(x' + vt') \\ y &= \alpha(v)\,y' \\ z &= \alpha(v)\,z' \\ t &= \mu(v)\left(t' + \frac{v}{\eta(v)}\,x'\right)\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei wir verwendet haben, daß alle Koeffizienten gerade Funktionen von v sind. Ein Vergleich mit (2.1) liefert $\alpha^2(v) = 1$, also $\alpha = \pm 1$. Da die Transformation für $v \to 0$ die Identität ergeben muß, bleibt nur das positive Vorzeichen als sinnvolle Lösung zurück:

$$\alpha = 1\,.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung von (2.1) mit μ und die vierte Gleichung mit $v\gamma$ und addieren dann beide Gleichungen, so erhalten wir

$$\mu x' + v\gamma t' = \mu\gamma\left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)x\,,$$

bzw. aufgelöst nach x

$$x = \frac{v}{\mu\left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)}\,t' + \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)}\,x'\,.$$

Der Vergleich mit (2.2) liefert

$$\frac{1}{\mu\left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)} = \gamma \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)} = \gamma$$

und damit

$$\mu(v) = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}}}\,,$$

wobei wir wegen der Stetigkeit bei $v \to 0$ wiederum nur das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigen müssen. Vom letzten verbleibenden Parameter $\eta(v)$ wissen wir bisher nur, daß es sich um eine gerade Funktion der Geschwindigkeit v handeln muß.

2.4 Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Um mehr über $\eta(v)$ zu erfahren, betrachten wir zwei Transformationen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2, die wir hintereinander ausführen:

$$S \overset{v_1}{\mapsto} S' \overset{v_2}{\mapsto} S''$$

entspricht in Matrix-Schreibweise und unter Weglassung der trivialen Transformationen für y und z

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} &= \gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\frac{v_2}{\eta(v_2)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \\
&= \gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\frac{v_2}{\eta(v_2)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\frac{v_1}{\eta(v_1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\
&= \gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 + \frac{v_1 v_2}{\eta(v_1)} & -v_1 - v_2 \\ -\frac{v_1}{\eta(v_1)} - \frac{v_2}{\eta(v_2)} & 1 + \frac{v_1 v_2}{\eta(v_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Nun bemühen wir erneut das Relativitätsprinzip. Danach ist die gesuchte Transformation universell, d.h. auch die S und S'' müssen über eine Transformation derselben Art miteinander verknüpft sein. Nun wissen wir aber schon, daß die Diagonalelemente in (2.3) identisch sein müssen. Das gilt aber nur, wenn $\eta(v_1) = \eta(v_2)$. Damit muß η eine Konstante sein. Die Dimension von η ist die einer Geschwindigkeit zum Quadrat. Da wir über das Vorzeichen von η noch nichts sagen können, schreiben wir

$$\eta = \pm c^2 , \tag{2.4}$$

wobei die Konstante c die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Die Bedeutung dieser Konstanten ergibt sich aus der Tatsache, daß sich (2.3) als Lorentz-Transformation in der Form

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma(w) \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\frac{w}{\eta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} .$$

schreiben lassen kann, wobei w die Geschwindigkeit von S'' relativ zu S ist. Vergleich mit (2.3) liefert dann sofort

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{\eta}} . \tag{2.5}$$

Stellen Sie sich vor, daß S mit dem Bahnsteig fest verbunden ist, S' mit dem Zug, der gerade mit v_1 vorbeifährt, und S'' mit einem Passagier, der im Zug mit Geschwindigkeit v_2 zum Speisewagen geht. Dann ist w die Geschwindigkeit des Passagiers relativ zum Bahnsteig. Gleichung (2.5) ist offensichtlich das *Additionstheorem für Geschwindigkeiten.*

2.5 Die universelle Grenzgeschwindigkeit c

Wir müssen noch entscheiden, welches der Vorzeichen in (2.4) richtig ist. Dazu betrachten wir zunächst den Fall $\eta = c^2$ und damit

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} . \tag{2.6}$$

Wenn v_1 und v_2 beide im Intervall $[-c, c]$ liegen, können wir sie schreiben als

$$\frac{v_i}{c} = \tanh \Phi_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.7}$$

mit eindeutig bestimmten reellen Werten Φ_1 und Φ_2. Für w ergibt sich dann aus (2.6) und dem Additionstheorem für Tangens hyperbolicus

$$w = c\,\frac{\tanh \Phi_1 + \tanh \Phi_2}{1 + \tanh \Phi_1 \tanh \Phi_2} = c\,\tanh(\Phi_1 + \Phi_2)\,,$$

d.h., die Summe zweier Geschwindigkeiten $|v_1| < c$ und $|v_2| < c$ ergibt stets wieder eine Geschwindigkeit $|w| < c$. In diesem Sinne ist c eine *Grenzgeschwindigkeit*, die nicht überschritten werden kann. Selbst für $v_1 = c$ (also $\Phi_1 = \infty$) ist die Summe aus v_1 und einer beliebigen Geschwindigkeit $|v_2| \leq c$ wieder 'nur' c.

Übrigens führt die Addition zweier Geschwindigkeiten $|v_1| > c$ und $|v_2| > c$ über die Parametrisierung

$$v_1 = c \coth \Phi_1 \qquad v_2 = c \coth \Phi_2$$

zu

$$w = c\,\frac{\coth \Phi_1 + \coth \Phi_2}{1 + \coth \Phi_1 \coth \Phi_2} = c\,\coth(\Phi_1 + \Phi_2)\,,$$

d.h., die Summe (oder Differenz!) zweier Geschwindigkeiten $|v_1| > c$ und $|v_2| > c$ ist stets wieder eine Geschwindgikeit $|w| > c$! Das Gleiche gilt übrigens auch, wenn nur *eine* der beiden Geschwindigkeiten größer ist als c. Im Bereich der Geschwindigkeiten $> c$ stellt c somit eine Grenze dar, die nicht unterschritten werden kann.

2.6 Die Rolle der Kausalität

Jetzt betrachten wir den Fall $\eta = -c^2$, also

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}\,. \tag{2.8}$$

In diesem Fall addieren sich zwei Geschwindigkeiten

$$v_1 = v_2 = \frac{c}{2}$$

zu einer Geschwindigkeit

$$w = \frac{4}{3} c\,,$$

d.h. es sind Geschwindigkeiten größer als c möglich, c ist keine Grenzgeschwindigkeit. Allerdings markiert c auch hier eine invariante Geschwindigkeit mit einer besonderen Bedeutung. Addiert man nämlich zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2 mit

$$v_1 v_2 = c^2\,,$$

so verschwindet der Nenner in (2.8) und die Summe der Geschwindigkeiten ist unendlich. Noch absurder wird die Situation, wenn wir zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten addieren für die $v_1 v_2 > c^2$ gilt. Dann wird der Nenner in (2.8) negativ, d.h., die resultierende Geschwindigkeit ist zwar endlich, aber entgegengesetzt zu v_1 und v_2. Diese Ergebnisse widersprechen der Anschauung. Aber dürfen wir deshalb den Fall $\eta = -c^2$ ausschließen? Welches physikalische Prinzip wäre durch ein solches Szenario verletzt? Die Situation wird klarer, wenn wir die t- und t'-Achsen mit der (invarianten) Konstanten c skalieren (und damit Zeiten und Längen mit der gleichen Maßeinheit messen). Für $\eta = -c^2$ sieht die Transformation dann so aus:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

mit

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Die Tranformation mit $\eta = -c^2$ entpricht somit einer gewöhnlichen Drehung im (x, ct)-Raum. Damit werden Längen- und Zeitintervalle aber völlig symmetrisch behandelt. Insbesondere folgt so aus der Isotropie des Raumes auch die Isotropie der Zeit. Letzteres steht aber im Widerspruch zur *Kausalität*, wonach die Ursache der Wirkung immer vorausgeht, die Zeit also nur in eine Richtung verlaufen kann. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß ein Beobachter in S zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = 0$ ein Experiment startet (Ursache) dessen Ergebnis (Wirkung) er zum Zeitpunkt $\Delta t > 0$ am Ort $x = c\Delta t$ beobachtet. Ein Beobachter in S' registriert das Ergebnis des Experimentes dann nach

$$\Delta t' = \Delta t(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

was z.B. für $v = -2c$ (Beobachter bewegt sich mit doppelter „Wirkungsausbreitungsgeschwindigkeit“ in entgegengesetzte Richtung) negativ ist. Ein solcher Beobachter würde das Ergebnis eines Experimentes also registrieren können, noch bevor es gestartet wurde! Diese Verletzung des Kausalitätsprinzips müssen wir natürlich ausschließen, also kann $\eta = -c^2$ nicht richtig sein.

2.7 Die Lorentz-Transformation

Wir haben gesehen, daß die Koordinatentranformation zwischen zwischen zwei Inertialsystemen in der speziellen Anordung der Abb. 2.1 allein aus

- der Homogenität von Raum und Zeit,
- der Isotropie des Raumes,
- dem Relativitätsprinzip und
- der Kausalität

bis auf eine unbestimmte Konstante c eindeutig festgelegt ist. Sie lautet

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dies ist die *Lorentz-Transformation*. Über die unbekannte, universelle Grenzgeschwindigkeit c kann nur das Experiment Auskunft geben.

Heute wissen wir, daß c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Das ergibt sich theoretisch aus den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik. Die Geschwindigkeiten, die bei physikalischen Experimenten auf der Erde auftreten, sind jedoch meist sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Es ist daher nicht verwunderlich, daß man bis zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts nichts von einer alles limitierenden Grenzgeschwindigkeit wahrgenommen hat. Diese Interpretation wird durch (2.10) wiedergegeben, in dem man $c = \infty$ setzt. Die resultierende Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2.11}$$

heißt (spezielle) *Galilei-Transformation*, und das zugehörige Additionstheorem für Geschwindigkeiten lautet einfach

$$w = v_1 + v_2\,. \tag{2.12}$$

Die Galilei-Transformation ist deutlich einfacher und entspricht der an der Alltagserfahrung geschulten Anschauung. Auch wir werden zunächst den Standpunkt $c = \infty$ vertreten, d.h., wir werden annehmen, die Galilei-Transformation sei die richtige Transformation zwischen Inertialsystemen. Die daraus entwickelten Theorien gelten damit nur, solange alle auftauchenden Geschwindigkeiten sehr viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit.

Das Relativitätsprinzip verlangt, daß die physikalischen Gesetze forminvariant sind unter Lorentz-Transformationen. Physikalische Gleichungen, die dieser Forderung genügen, heißen Lorentz-invariant (oder kovariant). Für $c = \infty$ verlangen wir dagegen Forminvarianz unter der Galilei-Transformation (2.11).

Die Newton'sche Mechanik (nächste Vorlesung) ist Galilei-invariant. Die Lorentz-invariante Version der Mechanik wurde erst 1905 von Albert Einstein entwickelt und ist bekannt als spezielle Relativitätstheorie. Wir werden die relativistische Mechanik erst am Ende dieser Vorlesungsreihe diskutieren, ebenso wie die bemerkenswerten kinematischen Eigenschaften, die aus der Lorentz-Transformation für $c < \infty$ folgen, wie etwa die Möglichkeit von Zeitreisen in die Zukunft, der Verlangsamung bewegter Uhren und der Verkürzung bewegter Maßstäbe. Auch die berühmte Formel $E = mc^2$, die Äquivalenz von Masse und Energie, ist eine Folge der Lorentz-Transformationen.

2.8 Notizen

2.1 Einstein hat für seine Herleitung der Lorentz-Transformation neben dem Relativitätsprinzip auch die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit *postuliert*. Damit geht die Herleitung sehr viel einfacher, und man braucht nicht einmal Annahmen zu machen über die Isotropie des Raumes oder die Homogenität von Raum und Zeit, die aber natürlich implizit in der Invarianz der Lichtausbreitung stecken. Siehe z.B.

- A. Macdonald. Derivation of the Lorentz transformation. *Am. J. Phys.*, 49(5):493, 1981.

2.2 Über die Herleitung der Lorentz-Transformation allein aus dem Relativitätsprinzip, d.h., ohne die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit zu postulieren, wurde viel geschrieben. Besonders lesenswert:

- D. A. Sardelis. Unified derivation of the Galileo and the Lorentz transformations. *Eur. J. Phys.*, 3(2):96–99, 1982
- J.-M. Lévy-Leblond. One more derivation of the Lorentz transformation. *Am. J. Phys.*, 44(3):271–277, 1976

2.3 Das Relativitätsprinzip verlangt, daß die Verknüpfung zweier Lorentz-Transformationen wieder eine Lorentz-Transformation ist, die Lorentz-Transformationen somit eine *Gruppe* bilden, eine Gruppe, die durch die Relativgeschwindigkeit v der Inertialsysteme parametrisiert wird. Nach einem Theorem der Mathematik ist jede einparametrige Gruppe, die differenzierbar und zusammenhängend ist, isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen. Für die Lorentz-Gruppe ist diese Isomorphie durch (2.7) gegeben: Die Verknüpfung zweier Lorentztransformationen mit v_1 und v_2 entspricht der Addition der Rapiditäten Φ_1 und Φ_2. Siehe

- J.-M. Lévy-Leblond and J.-P. Provost. Additivity, rapidity, relativity. *Am. J. Phys.*, 47(12):1045–1049, 1979.

2.9 Kontrollfragen

1. Was ist ein Inertialsystem?
2. Erläutern Sie das Relativitätsprinzip!
3. Warum muß die Transformation zwischen zwei Inertialsystemen linear sein?
4. Betrachten sie zwei achsenparallele Inertialsysteme S und S', wobei sich der Ursprung von S' gegenüber S in x-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. In dem Moment, in dem die Koordinatenursprünge zusammenfallen, werden die Uhren in beiden Systemen auf Null gestellt. Wie lautet die allgemeinste Transformation von S nach S', die mit den grundlegenden Annahmen über Raum und Zeit, dem Relativitätsprinzip und der Kausalität vereinbar ist?
5. In der allgemeinen Transformation zwischen Inertialsystemen taucht ein Parameter c auf, der die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Begründen Sie, warum der Zahlenwert von c in allen Inertialsystemen derselbe sein muß.
6. Welche Bedeutung hat der Parameter c neben dem Zusammenhang mit der Lichtgeschwindigkeit?
7. Wie lautet die Additionsformel für Geschwindigkeiten?
8. Wie sieht die Transformation zwischen Inertialsystemen aus, wenn $c = \infty$ ist?