10 Variationsrechnung

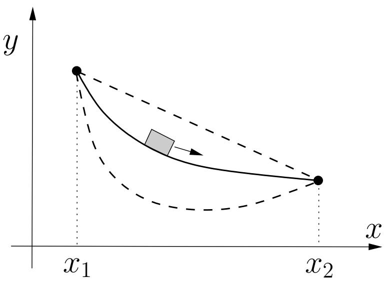
Gegenstand der Variationsrechnung sind *Funktionale*, also Abbildungen, die einer *Funktion* eine *Zahl* (den Wert des Funktionals) zuordnen. Beispiel eines Funktionals ist die Länge einer Kurve $y(x)$ zwischen den Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$,

$$J[y] = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + y'(x)^2}\,. \tag{10.1}$$

Zur Unterscheidung zwischen Funktionalen und Funktionen verwenden wir eckige Klammern für das Argument eines Funktionals.

Im Zentrum der Variationsrechnung steht dabei die Frage, welche Funktion ein gegebenes Funktional maximiert oder minimiert. Dabei schränkt man in der Regel die Funktionen $y(x)$ auf solche ein, die die vorgegebenen Randbedingungen $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ erfüllen.

10.1 Variationsprobleme



Das berühmteste dieser Art von Problemen, und gleichzeitig der historische Ursprung der Variationsrechnung, ist das *Brachistochronen-Problem*: Ein Teilchen der Masse m gleite reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer Rutschbahn $y(x)$ von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$. Die Anfangsgeschwindigkeit bei P_1 sei Null. Wie muß die Rutschbahn geformt sein, damit die Laufzeit T von P_1 nach P_2 minimal ist? Die Bahn mit der kürzesten Laufzeit heißt Brachistochrone (gr. *brachistos* kürzest, *chronos* Zeit). Die Brachistochrone minimiert das Funktional

$$J[y] = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2\,g(y_1 - y(x))}}\,, \tag{10.2}$$

wobei der Nenner aus dem Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ folgt.

Ein weiteres Beispiel sind *Minimalflächen.* Durch Rotation um die x-Achse bilden die Punkte P_1 und P_2 Kreisringe, die wir uns durch zwei Drähte realisiert vorstellen. Zwischen diesen Drähten bildet $y(x)$ das Profil einer rotationssymmetrischen Fläche, die wir uns als Seifenhaut vorstellen. Durch die Oberflächenspannung wird diese Fläche so geformt sein, daß ihre Oberfläche minimal ist. Die Seifenhaut minimiert das Funktional

$$J[y] = 2\pi \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s\, y = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, y(x)\, \sqrt{1 + y'(x)^2}\,. \tag{10.3}$$

Alle genannten Beispiele sind Spezialfälle des folgenden Variationsproblems: Gesucht ist die Funktion $y(x)$, die das Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, F(y, y', x) \tag{10.4}$$

für gegebenes $F(y, y', x)$ und gegebene feste Randwerte

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2 \tag{10.5}$$

minimiert. Wenn $y(x)$ die Funktion ist, die $J[y]$ minimiert, so muß

$$J[y + \delta y] \geq J[y]$$

gelten für eine infinitesimale Abweichung δy. Wir schreiben die infinitesimale Abweichung als

$$\delta y = \varepsilon \, \eta(x)$$

mit infinitesimalem Faktor ε und einer beliebigen Funktion $\eta(x)$, die ausser gewissen Regularitätsbedingungen nur

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{10.6}$$

erfüllen muß, um die Randbedingungen nicht zu verletzen. Das Funktional $J[y + \delta y]$ ist damit eine Funktion von ε geworden,

$$J[y + \delta y] = J[y + \varepsilon\eta] = J(\varepsilon) \, .$$

Wenn y ein Minimum ist von $J[y]$, dann muß $J(\varepsilon)$ ein Minimum bei $\epsilon = 0$ haben, für beliebige Funktionen η, die (10.6) erfüllen. Eine *notwendige Bedingung* dafür ist

$$\left. \frac{\mathrm{d}J[y + \varepsilon\eta]}{\mathrm{d}\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} = 0 \, . \tag{10.7}$$

Diesen Differentialquotienten wollen wir ausrechnen. Dazu führen wir die Notation

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

ein und machen dann eine Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} J[y + \varepsilon\eta] &= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \left[F(y, y', x) + F_y(y, y', x) \, \varepsilon \, \eta(x) + F_{y'}(y, y', x) \, \varepsilon \, \eta'(x) \right] + O(\varepsilon^2) \, . \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung (10.7) ist dann äquivalent zu

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \left(F_y \eta + F_{y'} \eta' \right) \overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{F_{y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} + \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} \right) \eta \, , \tag{10.8}$$

und da das für beliebige η gelten soll, muß der Ausdruck in $(\cdots)$ im letzten Integral identisch verschwinden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} - \frac{\partial F(y,y'x)}{\partial y} = 0\,. \tag{10.9}$$

Das ist die *Euler-Gleichung* der Variationsrechnung. Sie ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y(x)$ und linear in y''. Ihre Lösungen sind stationäre „Punkte" des Funktionals (10.4) und erfüllen damit die notwendige Bedingung für ein Minimum. Ob die Lösung der Euler-Gleichung tatsächlich ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt von (10.4) ist, muß im Einzelfall untersucht werden.

Die „kleine Abweichung" $\delta y(x) = \varepsilon\eta(x)$ heißt *Variation von* $y(x)$, und was wir gerade ausgerechnet haben, ist eine Bedingung dafür, daß die daraus resultierende Variation von $J[y]$ stationär ist. In Kurznotation:

$$\delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int \mathrm{d}x \left(F_y \delta y + F_{y'}\delta y'\right) = \int \mathrm{d}x \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)\delta y \stackrel{!}{=} 0\,, \tag{10.10}$$

und aus der Beliebigkeit von δy folgt die Euler-Gleichung.

Beispiel: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Welche Kurve minimiert (10.1)? Hier ist

$$F = \sqrt{1+y'^2}$$

und die Euler Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = 0\,.$$

Daraus folgt aber sofort $y'(x) = \text{const}$ und damit

$$y(x) = ax + b\,,$$

was wir natürlich nicht anders erwartet haben.

10.2 Erhaltungssätze

Die Korrespondenzen

$$y(x) \leftrightarrow q(t) \qquad F(y,y',x) \leftrightarrow L(q,\dot{q},t)$$

machen deutlich, daß die Euler-Gleichung der Variationsrechnung und die Lagrange-Gleichung der Mechanik die gleiche Struktur haben. Deshalb kennt man beide Gleichungen auch unter dem Namen *Euler-Lagrange-Gleichung.* Wir nutzen diese Korrespondenz zunächst, um die Erhaltungssätze aus der Mechanik auf die Variationsrechnung zu übertragen.

Da ist zunächst das Analogon zur Impulserhaltung: Wenn F nicht explizit von y abhängt, so können wir die Euler-Gleichung einmal integrieren und erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(y', x) = \text{const.} \tag{10.11}$$

Dies Gleichung ist nur noch erster Ordnung in x. Wir können sie nach y' auflösen und durch Trennung der Variablen ein weiteres Mal integrieren, um zur Lösung zu gelangen.

Das Analogon zum Energieerhaltungssatz der Mechanik ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right) &= y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \\
&= y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \\
&= y'\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)}_{=0} - \frac{\partial F}{\partial x}\,.
\end{aligned}$$

Wenn F also nicht explizit von x abhängt, haben wir eine Erhaltungsgröße, die natürlich zur mechanischen Hamilton-Funktion korrespondiert:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{const.} \tag{10.12}$$

Auch hier haben wir mit dem Erhaltungssatz eine Gleichung erster Ordnung, die wir durch Auflösung nach y' und Trennung der Variablen nur noch einmal integrieren müssen. Gleichung (10.12) ist auch bekannt als *Beltrami Identität.*

10.3 Lösung des Brachistochronen-Problems

Beim Brachistochronen-Problem ist

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_1 - y)}}$$

nicht explizit von x abhängig. Wenn wir dieses F in (10.12) einsetzen und die Konstante $1/c$ nennen, erhalten wir

$$\frac{c^2}{2g} = (y_1 - y)(1 + y'^2)\,.$$

Wir wollen die Lösung dieser Differentialgleichung in Form einer parametrischen Darstellung $\big(x(t), y(t)\big)$ finden und machen dafür den Ansatz

$$y' = -\frac{1}{\tan(t/2)}\,.$$

Damit folgt

$$\frac{c^2}{2g(y_1 - y)} = 1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{\tan^2(t/2)} = \frac{1}{\sin^2(t/2)}.$$

Mit Hilfe der Identität $\sin^2(t/2) = (1 - \cos t)/2$ können wir dies als

$$y(t) = y_1 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos t)$$

schreiben. Die Gleichung für $x(t)$ findet man durch Integration von

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\tan(t/2)} = -\frac{c^2}{2g}\sin\frac{t}{2}\,\cos\frac{t}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

zu

$$x = x_1 + \int_0^x \mathrm{d}x' = x_1 + \frac{c^2}{2g}\int_0^t \sin^2\frac{t'}{2}\,\mathrm{d}t' = x_1 + \frac{c^2}{2g}\left(\frac{1}{2}t' - \frac{1}{2}\sin t'\right)\bigg|_0^t .$$

Zusammen erhalten wir die Parameterdarstellung einer *Zykloide* (Abrollkurve)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + \frac{c^2}{4g}(t - \sin t) \\ y(t) &= y_1 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos t)\,, \end{aligned} \tag{10.13}$$

wobei der Radius $c^2/4g$ des Abrollkreises und der finale Abrollwinkel t immer so gewählt werden können, daß der Zielpunkt (x_2, y_2) von der Zykloide erreicht wird.

10.4 Verallgemeinerungen

Bis hierher haben wir nur Funktionale betrachtet, die von einer Funktion der Form $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abhängen, und dabei nicht von höheren als der ersten Ableitung abhängen. Zugelassen waren außerdem nur Variationen, bei denen die Randwerte fest blieben. Wenn man diese Festlegungen lockert, erhält man Verallgemeinerungen des Variationsproblems, die auf entsprechende Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange Gleichung führen.

10.4.1 Mehrere Funktionen

Die für die Mechanik wichtigste Verallgemeinerung ist die auf f Funktionen,

$$J[y_1, \ldots, y_f] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, F(y_1, \ldots, y_f, y_1', \ldots, y_f', x)\,, \tag{10.14}$$

mit festen Randwerten

$$y_i(x_1) = y_{i1} \qquad y_i(x_2) = y_{i2} \qquad i = 1, \ldots, f \tag{10.15}$$

Gesucht sind die Funktionen $y_i(x)$, für die J stationär wird. Für diese Funktionen muß

$$J(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_f) = J[y_1+\varepsilon_1\eta_1,\dots,y_f+\varepsilon_f\eta_f]$$

bei $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_f=0$ stationär sein:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_f=0} = 0 \qquad i=1,\dots,f$$

Analog zum Fall $f=1$ liefert das f Euler-Lagrange-Gleichungen für die Funktionen y_i:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y_i'} - \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y_i} = 0 \qquad i=1,\dots,f\,, \tag{10.16}$$

wobei wir die Abkürzungen $y=(y_1,\dots,y_f)$ und $y'=(y_1',\dots,y_f')$ verwendet haben. Ausserdem haben wir vorausgesetzt, daß die y_j unabhängig voneinander variiert werden dürfen.

10.4.2 Mehrere Argumente

Als nächstes betrachten wir Funktionale einer Funktion $y:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$. In diesem Fall besteht das Funktional

$$J[y] = \int_B \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\, F(y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n},x_1,\dots,x_n) \tag{10.17}$$

aus einem Integral über ein Gebiet $B\subset\mathbb{R}^n$. Bei den Variationen ist $y(x_1,\dots,x_n)$ auf dem Rand von B fest vorgegeben. Die Variation lautet jetzt

$$\delta y = \varepsilon\eta(x_1,\dots,x_n)\,,$$

wobei η auf dem Rand von B verschwindet. Die Forderung $\delta J=0$ führt zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{10.18}$$

Beispiel für ein Variationsproblem mit $n=2$: Die Auslenkung einer Membran (Seifenhaut) im Schwerefeld. Hier konkurrieren Schwerkraft und Oberflächenspannung miteinander. Im Gleichgewicht ist die Summe aus potentieller Energie und Oberflächenspannung ein Minimum, und diese Summe läßt sich als ein Funktional der Form (10.17) mit $n=2$ schreiben.

Bei Variationsproblemen mit f Funktionen $y_i:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ werden (10.16) und (10.18) einfach miteinander kombiniert.

10.4.3 Höhere Ableitungen

Das Funktional kann auch von höheren Ableitungen als der Ersten abhängen:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \tag{10.19}$$

Am Rand des Integrationsintervalles werden bei den Variationen dann die Funktionswerte und die Werte aller Ableitungen bis hin zur Ordnung $n-1$ festgehalten. Analog zu (10.10) erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta J &= \textstyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left[F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + \ldots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right] \\ &= \textstyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left[F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 F_{y''}}{\mathrm{d}x^2} - \ldots (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x^n}\right] \delta y\end{aligned}$$

Dabei haben wir jeden Term $F_{y^{(k)}}\delta y^{(k)}$ k-fach partiell integriert, wobei laut Voraussetzung alle Randterme verschwinden:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x F_{y^{(k)}} \delta y^{(k)} = \underbrace{\left[F_{y^{(k)}}\, \delta y^{(k-1)}\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x}\, \delta y^{(k-1)}$$

Damit δJ für alle Variationen δy verschwindet, muß die eckige Klammer im Integranden verschwinden. Das führt uns zur Euler-Lagrange-Funktion für (10.19)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k} = 0\,. \tag{10.20}$$

10.4.4 Variation am Rand

Zu guter Letzt wollen wir noch den Fall diskutieren, daß die Randwerte bei der Variation nicht festgehalten werden. In diesem Fall verschwinden die Randterme bei der partiellen Integration in (10.8) nicht, denn $\eta(x_1)$ und $\eta(x_2)$ müssen nicht mehr Null sein. Damit (10.8) für alle η erfüllt ist, müssen wir zusätzlich zur Euler-Lagrange-Gleichung fordern, daß $F_{y'}$ am Rand verschwindet:

$$F_{y'}\big(y(x_1), y'(x_1), x_1\big) = F_{y'}\big(y(x_2), y'(x_2), x_2\big) = 0\,. \tag{10.21}$$

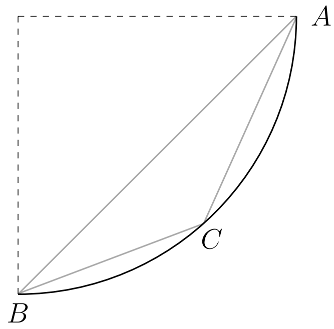
Diese beiden Gleichungen legen die beiden Integrationskonstanten fest, die sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung ergeben. Genau diese Aufgabe hatten vorher die vorgegeben, festen Randwerte übernommen. Wir schließen daraus, daß auch die Aufgabenstellung mit freien Randwerten wohldefiniert ist.

10.5 Bemerkungen

10.1 Tautochrone Die Brachistochrone ist auch eine *Tautochrone,* d.h. von jedem Punkt der Kurve benötigt man die gleiche Zeit, um zum Minimum zu gelangen (gr. *tautó* das Gleiche).

Dieser Zusammenhang wird beim Zykloidenpendel ausgenutzt, bei dem die Pendelmasse auf einer Tautochrone schwingt. Anders als beim üblichen Fadenpendel ist hier die Periodendauer nicht vom Auslenkwinkel abhängig.

10.2 Geschichte des Brachistochronen-Problems.



In seinem letzten Werk *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze* (1638) beschreibt Galileo Galilei, daß eine Kugel unter dem Einfluß der Schwerkraft schneller von A nach B kommt, wenn sie einem Viertelkreis folgt als wenn sie entlang einer schiefen Ebene oder einer Abfolge von schiefen Ebenen folgt. Galilei hat aber niemals behauptet, der Viertelkreis stelle die schnellste Verbindung dar.

Johann Bernoulli stellte das Brachistochronen-Problem 1696 in Band 15 der in Leipzig erscheinenden *Acta Eruditorum* (lat. Berichte/Taten der Gelehrten), eines der ersten wissenschaftlichen Journale überhaupt. Johann Bernoulli wollte damit hauptsächlich seinen Bruder Jakob herausfordern, mit dem er in ständigem Wettstreit stand. Mehrere prominente Wissenschaftler sandten ihre Lösungen ein, darunter de l'Hospital, Leibniz, Jakob Bernoulli und Isaac Newton. Letzterer schickte seine Lösung anonym, aber Johann Bernoulli erkannte den Urheber der Lösung sofort (lat. *ex ungue leonem* an den Klauen [erkennt man] den Löwen).

Johann Bernoulli löste das Problem sehr elegant, in dem er die Bahn als Lichtweg in einem Medium veränderlicher Brechzahl darstellte und das Fermat-Prinzip der kürzesten Laufzeit benutzte. Siehe dazu

- H. Erlichson. Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principls of least time. *Eur. J. Phys.*, 20:299–304, 1999

Die Lösung seines Bruders Jakob wurde dagegen später von Leonhard Euler und Joseph-Louis de Lagrange zu dem weiterentwickelt, was wir heute Variationsrechnung nennen.

10.3 Die Variationsrechnung mit variablen Start- und Endpunkten wird an Hand der Brachistochrone diskutiert in

- S. Mertens and S. Mingramm. Brachistochrones with loose ends. *Eur. J. Phys.*, 29:1191–1199, 2008

10.6 Kontrollfragen

1. Was ist ein Funktional? Beispiele?
2. Wie lautet das Funktional, das von einer Brachistochrone minimiert wird?
3. Was versteht man unter einer Variation?
4. Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung?
5. Was hat die Euler-Lagrange-Gleichung mit Variationsproblemen zu tun?